Algoritmos en Teoría de Grafos

Jesús García López de Lacalle

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

Algoritmos en Teoría de Grafos

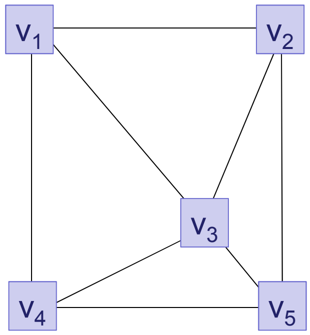
1. Introducción
2. Conectividad
3. Caminos mínimos y distancias
4. Planificación y optimización de tareas
5. Flujo máximo en redes de transporte

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

1- Introducción

- Vértices
- Aristas
- Adyacencia (v_1 y v_3)
- Incidencia (v_1 y v_1v_3)
- Núm. vértices: n = 5
- Núm. aristas: q = 8
- Grado ($gr(v_1)=3$)
- Teorema de Euler:

$$\Sigma\ gr(v) = 2q$$

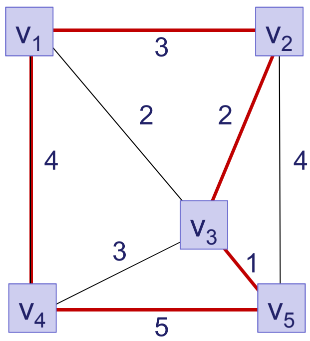


- Teorema: $0 \leq q \leq n(n-1)/2$

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

1- Introducción

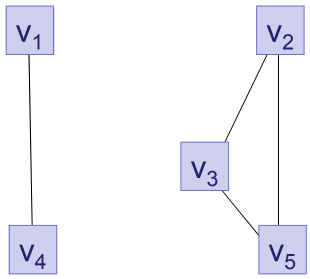
- Grafo ponderado
- Teorema:
  El número de vértices de grado impar es par
- Camino:
  $v_{i0}, v_{i2}, \ldots, v_{im}$ tal que $v_{is}v_{i(s+1)}$ es una arista para todo $0 \leq s < m$ y todos los vértices son distintos



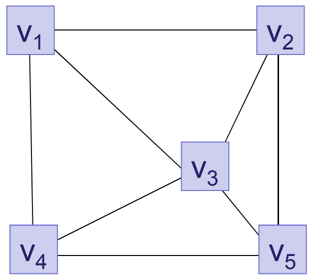
- Ciclo: camino cerrado

2- Conectividad

- Componente conexa: conjunto de vértices tal que entre cada dos de ellos existe un camino que los une
- Grafo conexo: grafo con una única componente conexa



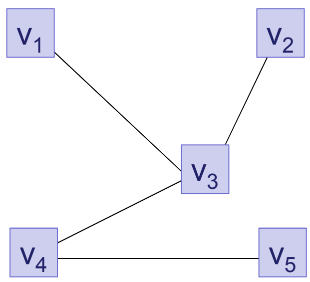
dos comp. conexas



conexo

2- Conectividad

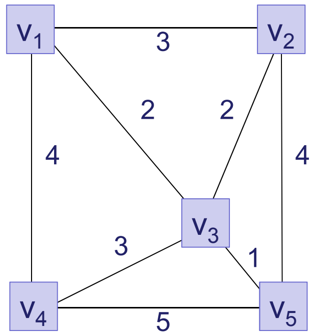
- Arboles: son grafos conexos acíclicos
- Caracterizaciones:
  - grafos conexos minimales
  - grafos conexos con q=n-1
  - grafos acíclicos con q=n-1
- Aplicaciones:
  - Representación de expresiones
  - Representación de conjuntos ordenados
  - Optimización: redes conexas minimales



2- Conectividad

- Cálculo de redes conexas minimales

  - **Vértices**: oficinas de una empresa
  - **Aristas**: líneas de datos contratadas
  - **Peso**: coste anual mantenimiento
  - **Problema**: reducir el coste
  - **Restricción**: mantener la conectividad
  - **Solución**: árbol generador de peso mínimo (¿único?)
  - **Peso de un grafo/subgrafo**: suma de los pesos de sus aristas

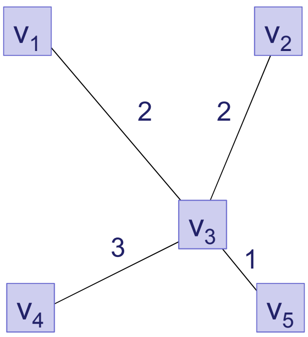


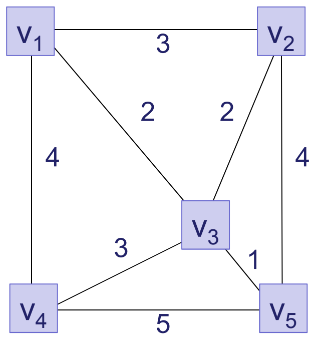
Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

2- Conectividad

- Cálculo del árbol generador de peso mínimo (Kruskal)

Estrategia: añadir la arista de menor peso que no genera ciclos

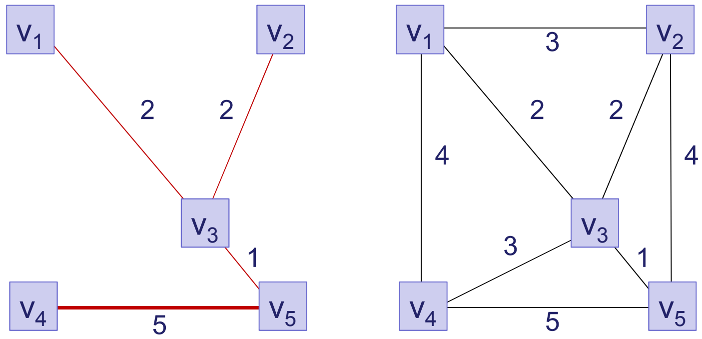




2- Conectividad

- Cálculo del árbol generador de peso mínimo (Kruskal)

Restricción adicional: la arista v_4v_5 debe mantenerse



Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

2- Conectividad

Algoritmos

- Algoritmo de Prim
- Algoritmo de Kruskal
- Algoritmo de Dijkstra

Bibliografía

- Harold Gabow. Two Algorithms for Generating Weighted Spanning Trees in Order, 1977.
- Jason Eisner. State-of-the-Art Algorithms for Minimum Spanning Trees: A Tutorial Discussion, 1997.

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación
Estado del Arte…

3- Caminos mínimos y distancias

- Camino mínimo y distancia entre dos vértices (Dijkstra)

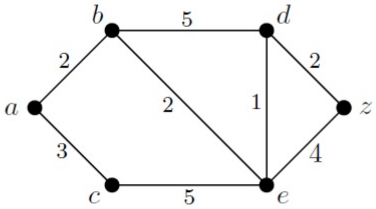
Aplicaciones: navegadores, ubicación de servicios, etc.

Camino mínimo: camino de menor peso que une ambos vértices (¿único?)

Distancia: es el peso del camino mínimo

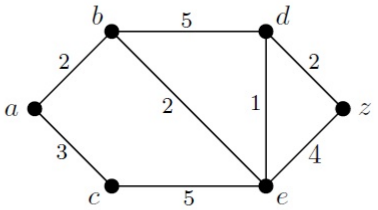
Estrategia: partir de un vértice e ir calculando el camino mínimo y la distancia al resto de los vértices, en orden creciente de distancia

3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



a	b	c	d	e	z	Caminos
0						

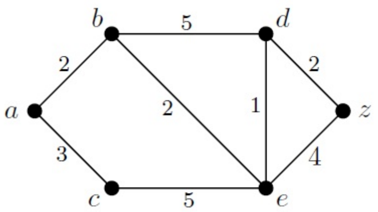
3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



a	b	c	d	e	z	Caminos
0	2	3	∞	∞	∞	

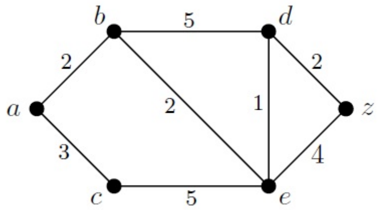
Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



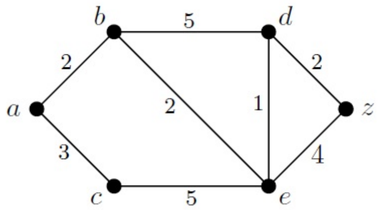
a	b	c	d	e	z	Caminos
0	2	3	∞	∞	∞	a, b

3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



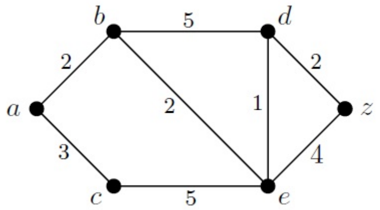
a	b	c	d	e	z	Caminos
0	2	3	∞	∞	∞	a, b
		3	7	4	∞	

3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



a	b	c	d	e	z	Caminos
0	2	3	∞	∞	∞	a, b
		3	7	4	∞	a, c

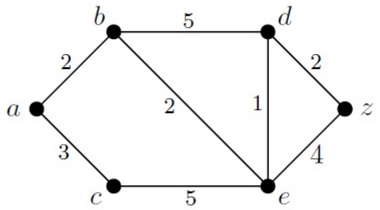
3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



a	b	c	d	e	z	Caminos
0	2	3	∞	∞	∞	a, b
		3	7	4	∞	a, c
			7	4	∞	

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

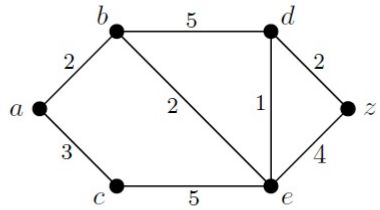
3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



a	b	c	d	e	z	Caminos
0	2	3	∞	∞	∞	a, b
		3	7	4	∞	a, c
			7	4	∞	a, b, e

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

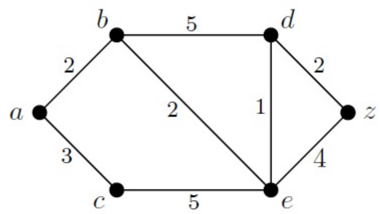
3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



a	b	c	d	e	z	Caminos
0	2	3	∞	∞	∞	a, b
		3	7	4	∞	a, c
			7	4	∞	a, b, e
			5		8	

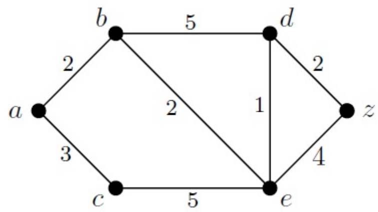
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



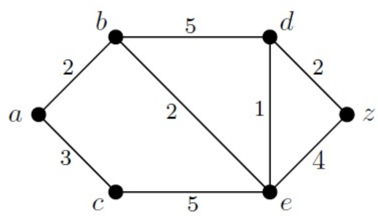
a	b	c	d	e	z	Caminos
0	2	3	∞	∞	∞	a, b
		3	7	4	∞	a, c
			7	4	∞	a, b, e
			5		8	a, b, e, d

3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



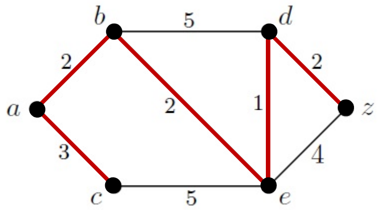
a	b	c	d	e	z	Caminos
0	2	3	∞	∞	∞	a, b
		3	7	4	∞	a, c
			7	4	∞	a, b, e
			5		8	a, b, e, d
					7	

3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



a	b	c	d	e	z	Caminos
0	2	3	∞	∞	∞	a, b
		3	7	4	∞	a, c
			7	4	∞	a, b, e
			5		8	a, b, e, d
					7	a,b,e,d,z

3- Caminos mínimos y distancias (Dijkstra)



a	b	c	d	e	z	Caminos
0	2	3	∞	∞	∞	a, b
		3	7	4	∞	a, c
			7	4	∞	a, b, e
			5		8	a, b, e, d
					7	a,b,e,d,z

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

3- Caminos mínimos y distancias

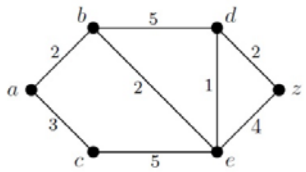


Tabla de distancias:

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a								
b								
c								
d								
e								
z								

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

3- Caminos mínimos y distancias

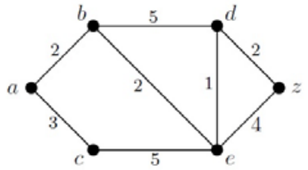


Tabla de distancias:

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7		
b								
c								
d								
e								
z								

3- Caminos mínimos y distancias

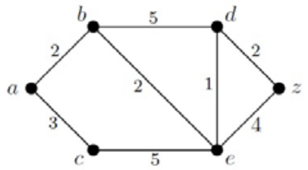


Tabla de distancias:

- es simétrica

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7		
b								
c								
d								
e								
z								

3- Caminos mínimos y distancias

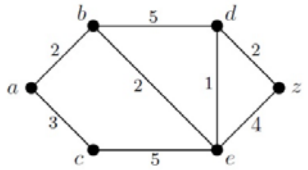


Tabla de distancias:

- es simétrica

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7		
b	**2**							
c	**3**							
d	**5**							
e	**4**							
z	**7**							

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

3- Caminos mínimos y distancias

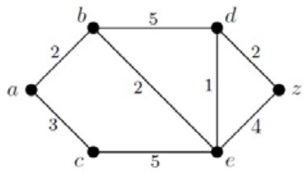


Tabla de distancias:

- es simétrica
- en la diagonal hay ceros

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7		
b	2							
c	3							
d	5							
e	4							
z	7							

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

3- Caminos mínimos y distancias

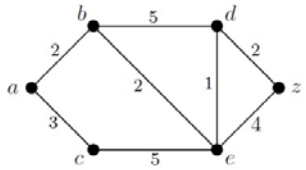


Tabla de distancias:

- es simétrica
- en la diagonal hay ceros

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7		
b	2	**0**						
c	3		**0**					
d	5			**0**				
e	4				**0**			
z	7					**0**		

3- Caminos mínimos y distancias

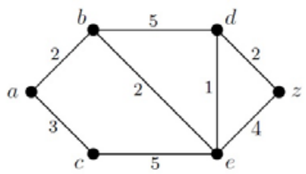
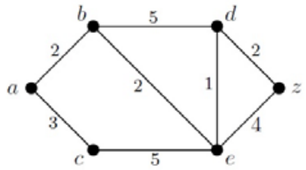


Tabla de distancias:

- es simétrica
- en la diagonal hay ceros

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7		
b	2	0	5	3	2	5		
c	3	5	0	6	5	8		
d	5	3	6	0	1	2		
e	4	2	5	1	0	3		
z	7	5	8	2	3	0		

3- Caminos mínimos y distancias

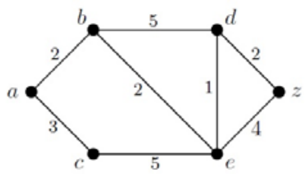


Centros del Grafo:

son los vértices que minimizan la máxima distancia

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7		
b	2	0	5	3	2	5		
c	3	5	0	6	5	8		
d	5	3	6	0	1	2		
e	4	2	5	1	0	3		
z	7	5	8	2	3	0		

3- Caminos mínimos y distancias



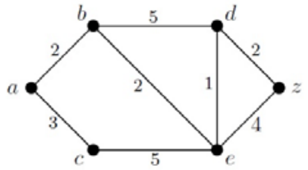
Centros del Grafo:

son los vértices que minimizan la máxima distancia

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7	**7**	
b	2	0	5	3	2	5	**5**	
c	3	5	0	6	5	8	**8**	
d	5	3	6	0	1	2	**6**	
e	4	2	5	1	0	3	**5**	
z	7	5	8	2	3	0	**8**	

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos — POLITÉCNICA — CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

3- Caminos mínimos y distancias



Centros del Grafo:

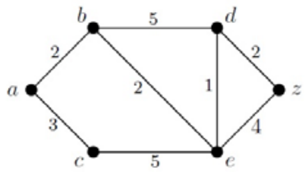
son los vértices que minimizan la máxima distancia

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7	7	
b	2	0	5	3	2	5	**5**	
c	3	5	0	6	5	8	8	
d	5	3	6	0	1	2	6	
e	4	2	5	1	0	3	**5**	
z	7	5	8	2	3	0	8	

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos — POLITÉCNICA — CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

3- Caminos mínimos y distancias



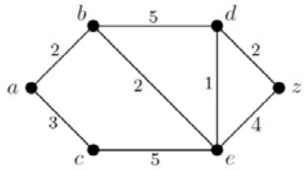
Medianas del Grafo:

son los vértices que minimizan la suma de distancias

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7	7	
b	2	0	5	3	2	5	**5**	
c	3	5	0	6	5	8	8	
d	5	3	6	0	1	2	6	
e	4	2	5	1	0	3	**5**	
z	7	5	8	2	3	0	8	

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

3- Caminos mínimos y distancias

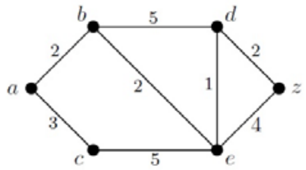


Medianas del Grafo:

son los vértices que minimizan la suma de distancias

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7	7	**21**
b	2	0	5	3	2	5	**5**	**17**
c	3	5	0	6	5	8	8	**27**
d	5	3	6	0	1	2	6	**17**
e	4	2	5	1	0	3	**5**	**15**
z	7	5	8	2	3	0	8	**25**

3- Caminos mínimos y distancias



Medianas del Grafo:

son los vértices que minimizan la suma de distancias

	a	b	c	d	e	z	r(.)	s(.)
a	0	2	3	5	4	7	7	21
b	2	0	5	3	2	5	**5**	17
c	3	5	0	6	5	8	8	27
d	5	3	6	0	1	2	6	17
e	4	2	5	1	0	3	**5**	**15**
z	7	5	8	2	3	0	8	25

3- Caminos mínimos y distancias

Un estudiante de la EUI trabaja en la empresa ZZZ. Esta buscando un piso de alquiler de manera que invierta el menor tiempo posible en acudir a sus dos ocupaciones.

El siguiente grafo representa la zona de la ciudad donde se encuentran la EUI y la empresa ZZZ y en la que el estudiante quiere alquilar el piso. Los pesos de las aristas miden el tiempo medio que se tarda en ir de una esquina a otra (se supone que el estudiante viaja en coche).

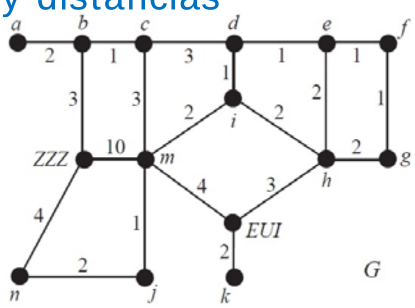
Se quiere determinar dónde deberá alquilar el piso, cuál es el trayecto optimo que debe seguir desde que sale de casa hasta que vuelve y cuánto tiempo invierte en desplazamientos si:

a) Va diariamente a la EUI y al trabajo

b) Va tres días a la EUI y dos días al trabajo

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

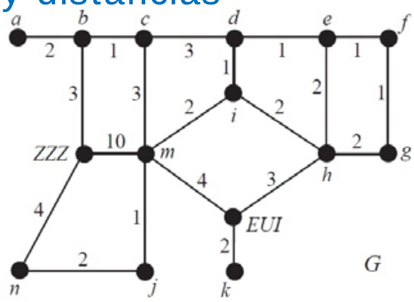
3- Caminos mínimos y distancias



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
EUI													
ZZZ													

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

3- Caminos mínimos y distancias

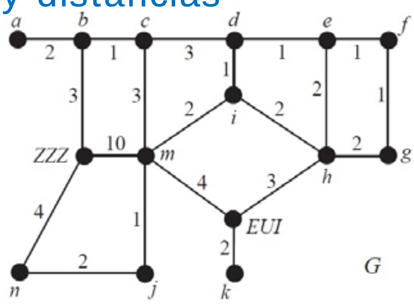


	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
EUI	10	8	7	6	5	6	5	3	5	5	2	4	7
ZZZ	5	3	4	7	8	9	10	10	8	6	13	7	4

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

3- Caminos mínimos y distancias

d(x,ZZZ) + d(ZZZ,EUI) + d(EUI,x)

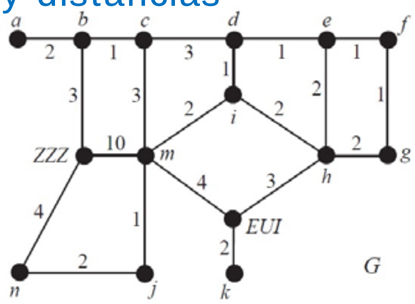


	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
EUI	10	8	7	6	5	6	5	3	5	5	2	4	7
ZZZ	5	3	4	7	8	9	10	10	8	6	13	7	4

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

3- Caminos mínimos y distancias

d(x,ZZZ) + d(ZZZ,EUI) + d(EUI,x)

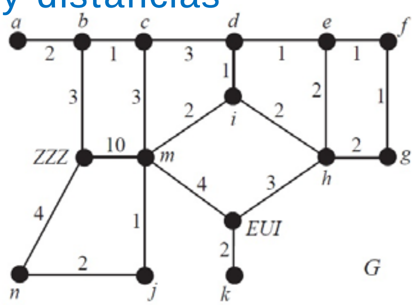


	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
EUI	10	8	7	6	5	6	5	3	5	5	2	4	7
ZZZ	5	3	4	7	8	9	10	10	8	6	13	7	4
	26	**22**	**22**	**24**	**24**	**26**	**26**	**24**	**24**	**22**	**26**	**22**	**22**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

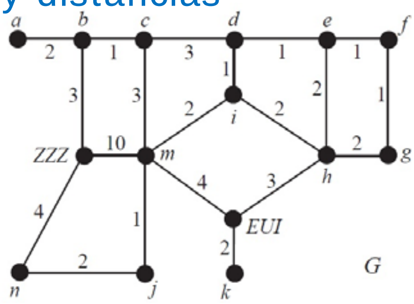
3- Caminos mínimos y distancias

d(x,ZZZ) + d(ZZZ,EUI) + d(EUI,x)



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
EUI	10	8	7	6	5	6	5	3	5	5	2	4	7
ZZZ	5	3	4	7	8	9	10	10	8	6	13	7	4
	26	**22**	**22**	24	24	26	26	24	24	**22**	26	**22**	**22**

3- Caminos mínimos y distancias

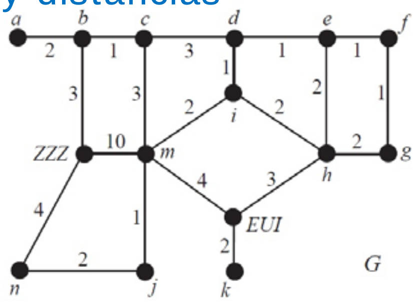


d(x,ZZZ) + d(ZZZ,EUI) + d(EUI,x)

6 d(x,EUI) + 4 d(x,ZZZ)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
EUI	10	8	7	6	5	6	5	3	5	5	2	4	7
ZZZ	5	3	4	7	8	9	10	10	8	6	13	7	4
	26	**22**	**22**	24	24	26	26	24	24	**22**	26	**22**	**22**

3- Caminos mínimos y distancias



d(x,ZZZ) + d(ZZZ,EUI) + d(EUI,x)

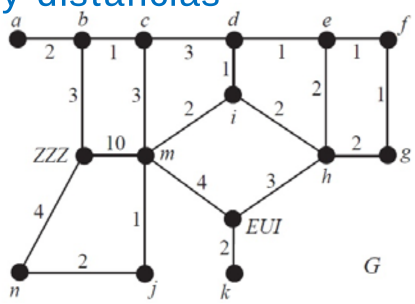
6 d(x,EUI) + 4 d(x,ZZZ)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
EUI	10	8	7	6	5	6	5	3	5	5	2	4	7
ZZZ	5	3	4	7	8	9	10	10	8	6	13	7	4
	26	**22**	**22**	24	24	26	26	24	24	**22**	26	**22**	**22**
	80	**60**	**58**	**64**	**62**	**72**	**70**	**58**	**62**	**54**	**64**	**52**	**58**

3- Caminos mínimos y distancias

d(x,ZZZ) + d(ZZZ,EUI) + d(EUI,x)

6 d(x,EUI) + 4 d(x,ZZZ)



	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
EUI	10	8	7	6	5	6	5	3	5	5	2	4	7
ZZZ	5	3	4	7	8	9	10	10	8	6	13	7	4
	26	**22**	**22**	24	24	26	26	24	24	**22**	26	**22**	**22**
	80	60	58	64	62	72	70	58	62	54	64	**52**	58

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

3- Caminos mínimos y distancias

Algoritmos

- Dijkstra's algorithm: solves the single-source shortest path problem.
- Bellman–Ford algorithm: solves the single-source problem if edge weights may be negative.
- A* search algorithm: solves for single pair shortest path using heuristics to try to speed up the search.
- Floyd–Warshall algorithm: solves all pairs shortest paths.
- Johnson's algorithm: solves all pairs shortest paths, and may be faster than Floyd–Warshall on sparse graphs.
- Viterbi algorithm: solves the shortest stochastic path problem with an additional probabilistic weight on each node.

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

3- Caminos mínimos y distancias (bibliografía)

- Dijkstra, E. W. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik* **1**, pp. 269–271, (1959).
- Knuth, D.E. A Generalization of Dijkstra's Algorithm. *Information Processing Letters* **6** (1), pp. 1–5 (1977).
- Fredman, Michael Lawrence; Tarjan, Robert E. Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. *Journal of the Association for Computing Machinery* **34** (3), pp. 596–615 (1987).
- Ahuja, Ravindra K.; Mehlhorn, Kurt; Orlin, James B.; Tarjan, Robert E. Faster Algorithms for the Shortest Path Problem. *Journal of Association for Computing Machinery (ACM)* **37** (2), pp. 213—223 (1990).
- Raman, Rajeev. Recent results on the single-source shortest paths problem. *SIGACT News* **28** (2), pp. 81—87 (1997).
- Zhan, F. Benjamin; Noon, Charles E. Shortest Path Algorithms: An Evaluation Using Real Road Networks. Transportation Science **32** (1), pp. 65–73 (1998).
- Thorup, Mikkel. Undirected single-source shortest paths with positive integer weights in linear time. *Journal of the ACM* **46** (3), pp. 362–394 (1999).

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

4- Planificación y optimización de tareas

Aplicaciones: programación concurrente, optimización de procesos, etc.

Ejemplo

En un determinado punto de un programa se deben asignar a las variables enteras *x, y, z, t, s, u, v* y *w* los siguientes valores:

$$x := z + v \qquad y := (-2)v \qquad z := 1 - w \qquad t := x(y+1)$$
$$s := z/(x+1) \qquad u := xts \qquad v := w/3 \qquad w := 9$$

a) Identificar las tareas a realizar y dibujar un grafo dirigido que represente la relación de dependencia entre ellas.

Vértices: variables

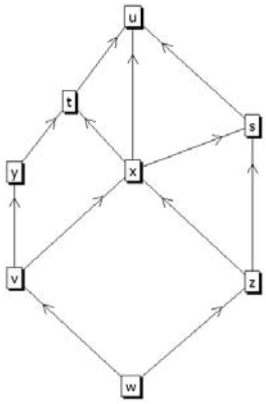
Aristas: v_1v_2 si la expresión que hay que asignar a v_2 contiene a v_1

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

4- Planificación y optimización de tareas

$x := z + v \qquad y := (-2)v \qquad z := 1 - w \qquad t := x(y+1)$

$s := z/(x+1) \qquad u := xts \qquad v := w/3 \qquad w := 9$



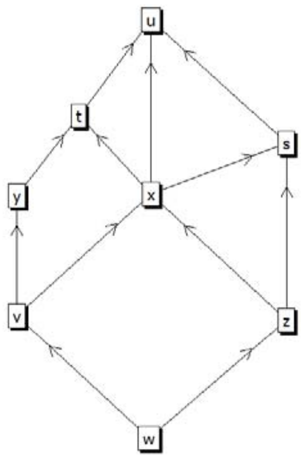
Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

4- Planificación y optimización de tareas

b) Determinar si es posible realizar la asignación de las variables

Estrategia:

ir extrayendo minimales (vértices con grado de entrada 0) para establecer un orden de realización



Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos

POLITÉCNICA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

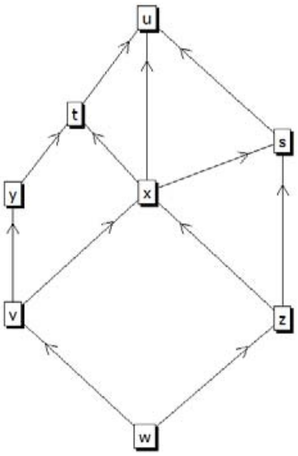
4- Planificación y optimización de tareas

b) Determinar si es posible realizar la asignación de las variables

Estrategia:

ir extrayendo minimales (vértices con grado de entrada 0) para establecer un orden de realización

w



Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos

POLITÉCNICA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

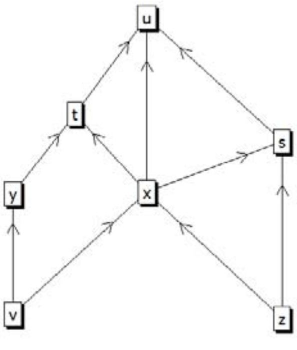
4- Planificación y optimización de tareas

b) Determinar si es posible realizar la asignación de las variables

Estrategia:

ir extrayendo minimales (vértices con grado de entrada 0) para establecer un orden de realización

w, v



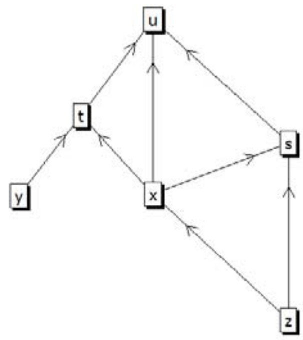
4- Planificación y optimización de tareas

b) Determinar si es posible realizar la asignación de las variables

Estrategia:

ir extrayendo minimales (vértices con grado de entrada 0) para establecer un orden de realización

w, v, y



Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

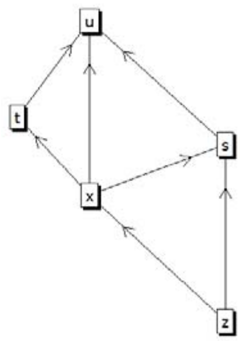
4- Planificación y optimización de tareas

b) Determinar si es posible realizar la asignación de las variables

Estrategia:

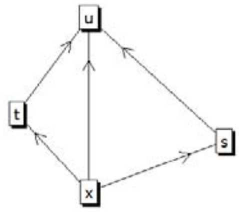
ir extrayendo minimales (vértices con grado de entrada 0) para establecer un orden de realización

w, v, y, z



4- Planificación y optimización de tareas

b) Determinar si es posible realizar la asignación de las variables



Estrategia:

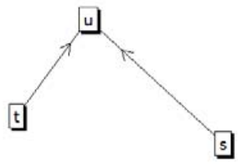
ir extrayendo minimales (vértices con grado de entrada 0) para establecer un orden de realización

w, v, y, z, x

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

4- Planificación y optimización de tareas

b) Determinar si es posible realizar la asignación de las variables



Estrategia:

ir extrayendo minimales (vértices con grado de entrada 0) para establecer un orden de realización

w, v, y, z, x, s, t, u

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…

4- Planificación y optimización de tareas

b) Determinar si es posible realizar la asignación de las variables

Estrategia:

ir extrayendo minimales (vértices con grado de entrada 0) para establecer un orden de realización

w, v, y, z, x, s, t, u

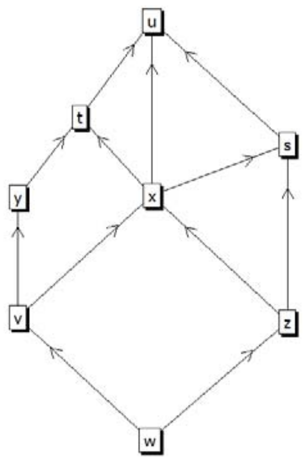
4- Planificación y optimización de tareas

b) Determinar si es posible realizar la asignación de las variables

Estrategia:

ir extrayendo minimales (vértices con grado de entrada 0) para establecer un orden de realización

w, v, y, z, x, s, t, u



Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos

POLITÉCNICA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

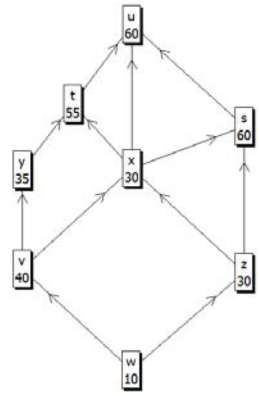
4- Planificación y optimización de tareas

c) Calcular el coste de evaluación de cada variable, sabiendo que las operaciones elementales tienen los siguientes costes:

Asignación	10
Producto	25

Suma	20
Cociente	30

Resta	20



$x := z + v$ $\quad y := (-2)v$ $\quad z := 1 - w$ $\quad t := x(y + 1)$

$s := z/(x + 1)$ $\quad u := xts$ $\quad v := w/3$ $\quad w := 9$

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos

POLITÉCNICA

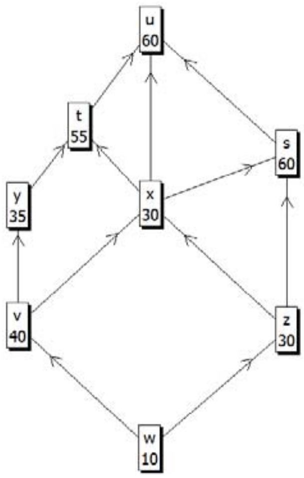
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

4- Planificación y optimización de tareas

d) Si se dispone de un sistema multiprocesador con 8 procesadores, determinar el tiempo de evaluación de las variables en dicho sistema

Estrategia:

ir extrayendo minimales y calulando su tiempo de realización



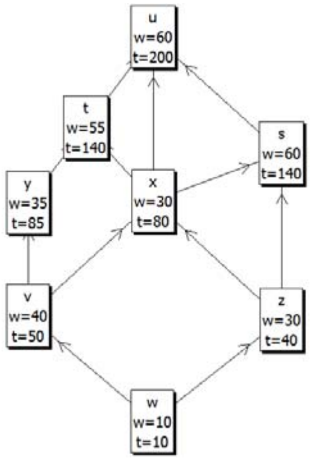
4- Planificación y optimización de tareas

d) Si se dispone de un sistema multiprocesador con 8 procesadores, determinar el tiempo de evaluación de las variables en dicho sistema

Estrategia:

ir extrayendo minimales y calulando su tiempo de realización

Tiempo: 200



Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

4- Planificación y optimización de tareas

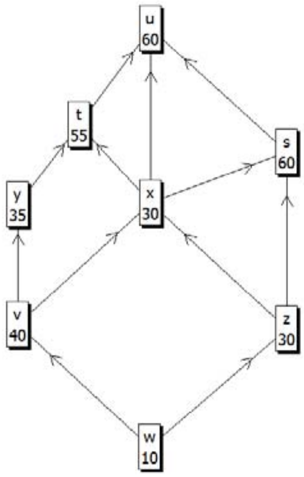
e) Si el sistema multiprocesador dispone de 2 procesadores, determinar si las siguientes planificaciones son correctas

$$P_1 : \begin{cases} E_1 = [w, z, v, y, t, u], \\ E_2 = [x, s] \end{cases}$$

$$P_2 : \begin{cases} E_1 = [w, v, y, t], \\ E_2 = [z, s, x, u] \end{cases}$$

Estrategia:

incluir las restricciones de la planificación y proceder como antes

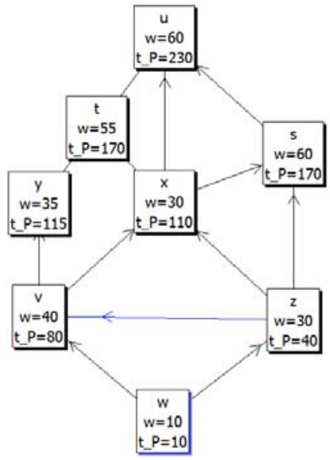


4- Planificación y optimización de tareas

e) Si el sistema multiprocesador dispone de 2 procesadores, determinar si las siguientes planificaciones son correctas

$$P_1 : \begin{cases} E_1 = [w, z, v, y, t, u], \\ E_2 = [x, s] \end{cases}$$

Tiempo: 230

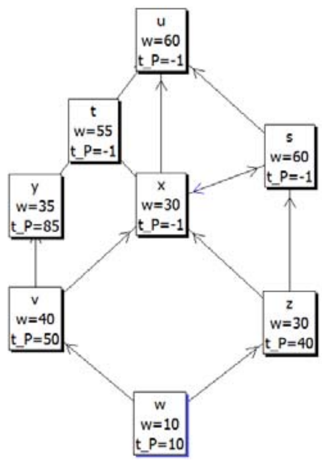


4- Planificación y optimización de tareas

e) Si el sistema multiprocesador dispone de 2 procesadores, determinar si las siguientes planificaciones son correctas

$$P_2 : \begin{cases} E_1 = [w, v, y, t], \\ E_2 = [z, s, x, u] \end{cases}$$

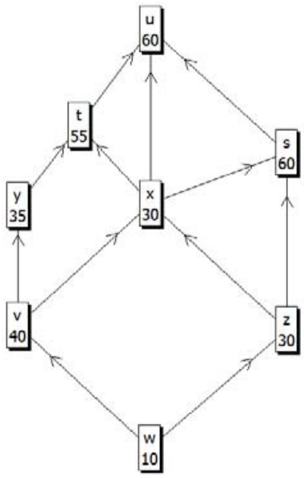
No es realizable: ciclo x,s,x



4- Planificación y optimización de tareas

f) Determinar el tiempo de evaluación de las variables si el sistema multiprocesador dispone de un solo procesador

Tiempo: 10 + 40 + 30 + 35 + 30 + 55 + 60 + 60 = **320**



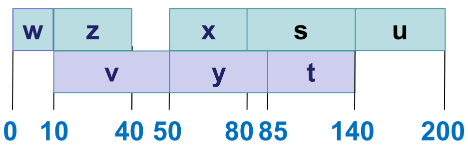
4- Planificación y optimización de tareas

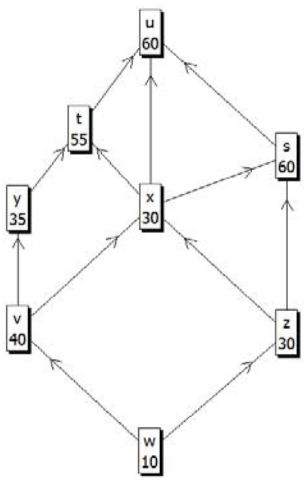
g) Determinar el mínimo número de procesadores necesario para evaluar todas las variables en tiempo mínimo

Cota inferior: 320/200 = 1,6 → **2**

Heurístico:

- empezar cada tarea en cuanto estén finalizadas las previas
- reutilizar equipos





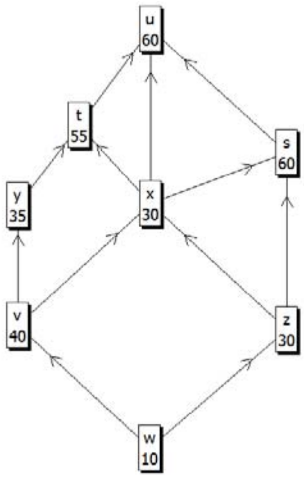
4- Planificación y optimización de tareas

h) Calcular las tareas críticas

Tareas críticas: son aquellas que cuando se reduce su coste se reduce también el tiempo mínimo

Estrategia: para determinar si una tarea es crítica se pone su coste a cero y se calcula el tiempo mínimo. Si dicho tiempo se reduce la tarea es crítica.

Tareas críticas: w → 10,
v → 10,
u → 60



Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

4- Planificación y optimización de tareas

- El resultado del algoritmo heurístico puede ser malo

Heurístico: 5 equipos

Optimo: 2 equipos

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte…