Flujos en redes de transporte:
Problema del flujo máximo

Jesús García López de Lacalle

Traparencias: Gregoria Blanco
Ángeles Martínez

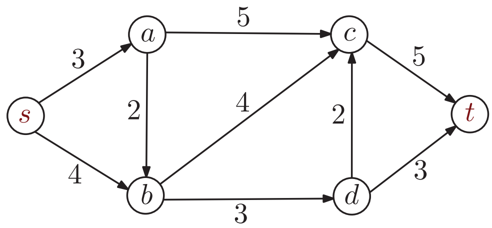
Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Presentaciones

Red básica de transporte:

$$N = (D, c)$$

1) $D = (V, A)$ digrafo conexo, sin bucles, con una fuente s y un sumidero t.
2) $c : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ capacidad.



Flujo en N:

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que

1) Ley de viabilidad: $f(x, y) \leq c(x, y)$ para toda $(x, y) \in A$
2) Ley de conservación: Para todo $v \in V - \{s, t\}$

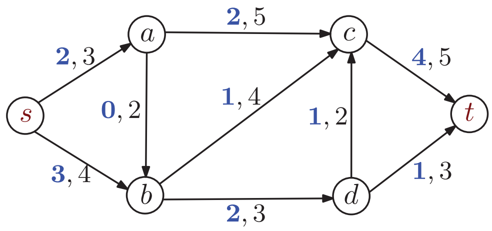
$$\underbrace{\sum_{(x,v)\in A} f(x, v)}_{f^-(v)} = \underbrace{\sum_{(v,y)\in A} f(v, y)}_{f^+(v)}$$

Presentaciones

Red básica de transporte:

$$N = (D, c)$$

1) $D = (V, A)$ digrafo conexo, sin bucles, con una fuente s y un sumidero t.
2) $c : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ capacidad.



Flujo en N:

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que

1) Ley de viabilidad: $f(x, y) \leq c(x, y)$ para toda $(x, y) \in A$
2) Ley de conservación: Para todo $v \in V - \{s, t\}$

$$\underbrace{\sum_{(x,v)\in A} f(x, v)}_{f^-(v)} = \underbrace{\sum_{(v,y)\in A} f(v, y)}_{f^+(v)}$$

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Presentaciones

Proposición: $f^+(s) = f^-(t)$

Dem: ....

$$\sum_{(v,y)\in A} f(v, y) = \sum_{v\in V} \left(\sum_{(v,y)\in A} f(v, y) \right) = \sum_{v\in V} f^+(v) = \sum_{v\in V} f^-(v)$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{v\in V} (f^+(v) - f^-(v)) \\ &= (f^+(s) - f^-(s)) + (f^+(t) - f^-(t)) + \sum_{v\in V-\{s,t\}} (f^+(v) - f^-(v)) \\ &= f^+(s) - f^-(t) \end{aligned}$$

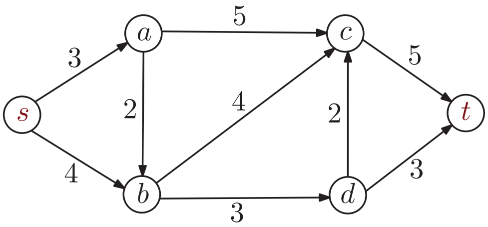
.... ■

Valor del flujo f: $\mathrm{val}(f) = f^+(s)$

Problema del flujo máximo

Objetivo

Dada una red N, hallar un flujo de valor máximo (flujo maximal).



Cota trivial: Para todo flujo f

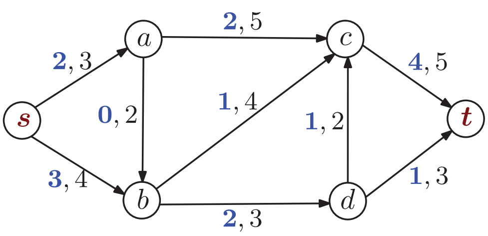
$$\mathrm{val}(f) \leq \sum_{(s,x)\in A} c(s,x)$$

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Problema del flujo máximo

Objetivo

Dada una red N, hallar un flujo de valor máximo (flujo maximal).



Cota trivial: Para todo flujo f

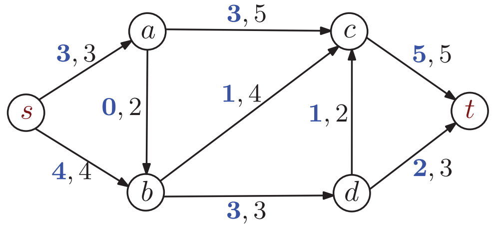
$$\mathrm{val}(f) \leq \sum_{(s,x)\in A} c(s,x)$$

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte...

Problema del flujo máximo

Objetivo

Dada una red N, hallar un flujo de valor máximo (flujo maximal).



flujo maximal

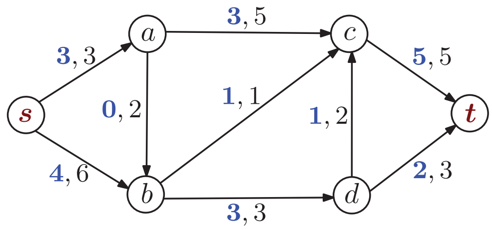
Cota trivial: Para todo flujo f

$$\mathrm{val}(f) \leq \sum_{(s,x)\in A} c(s,x)$$

Problema del flujo máximo

Objetivo

Dada una red N, hallar un flujo de valor máximo (flujo maximal).



flujo maximal

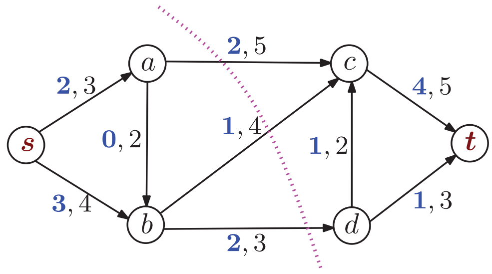
Cota trivial: Para todo flujo f

$$\mathrm{val}(f) \leq \sum_{(s,x)\in A} c(s,x)$$

Problema del flujo máximo

Objetivo

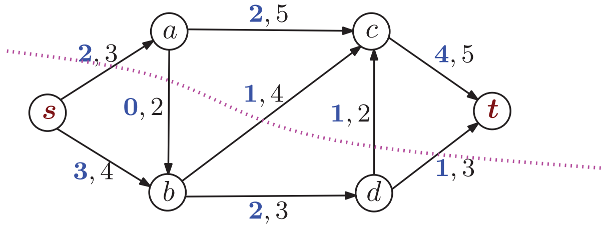
Dada una red N, hallar un flujo de valor máximo (flujo maximal).



Problema del flujo máximo

Objetivo

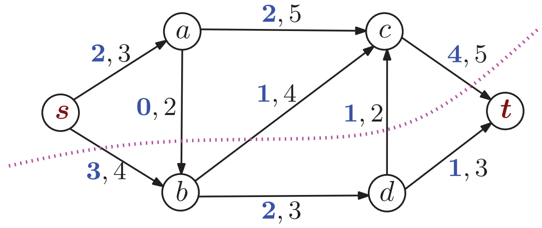
Dada una red N, hallar un flujo de valor máximo (flujo maximal).



Problema del flujo máximo

Objetivo

Dada una red N, hallar un flujo de valor máximo (flujo maximal).



Si (S,T) es una partición de V tal que $s \in S$ y $t \in T$ (corte),
El flujo neto de S a T es

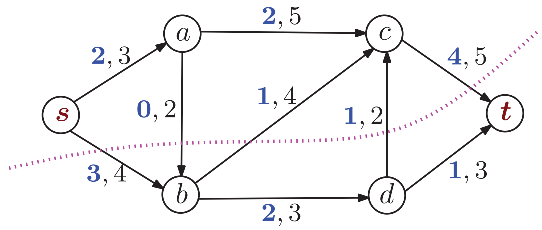
$$\sum_{x\in S\ y\in T} f(x,y) - \cancelto{\geq 0}{\sum_{u\in T\ v\in S} f(u,v)} = \mathrm{val}(f)$$

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Problema del flujo máximo

Objetivo

Dada una red N, hallar un flujo de valor máximo (flujo maximal).



Si (S,T) es una partición de V tal que $s \in S$ y $t \in T$ (corte),

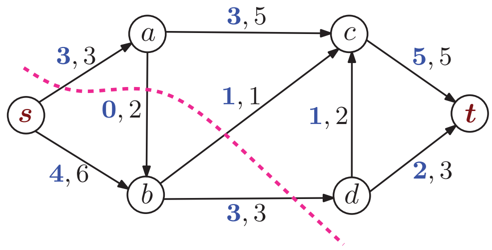
Cota más fina:

$$\sum_{x\in S\ y\in T} c(x,y) \geq \sum_{x\in S\ y\in T} f(x,y) \geq \mathrm{val}(f)$$

Problema del flujo máximo

Objetivo

Dada una red N, hallar un flujo de valor máximo (flujo maximal).



flujo maximal

Si $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T})$ es una partición de $\boldsymbol{V}$ tal que $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}$ (corte),

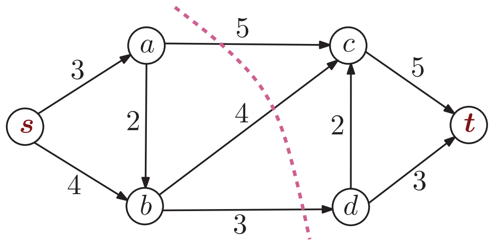
Cota más fina:

$$\sum_{x \in S\ y \in T} c(x, y) \geq \sum_{x \in S\ y \in T} f(x, y) \geq \mathrm{val}(f)$$

Problema del flujo máximo

Def.: La capacidad de un corte $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T})$ es

$$\mathrm{cap}(S, T) = \sum_{x \in S\ y \in T} c(x, y)$$

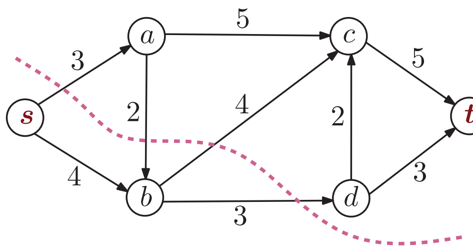


$\mathrm{cap}(S, T) = 12$

Problema del flujo máximo

Def.: La capacidad de un corte (S, T) es

$$\mathrm{cap}(S,T) = \sum_{x \in S \ y \in T} c(x,y)$$



$\mathrm{cap}(S', T') = 10$

Prop.: Para todo flujo f y todo corte (S, T),

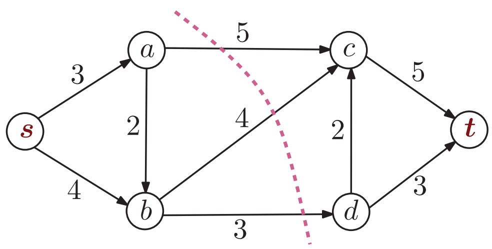
$$\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(S,T)$$

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

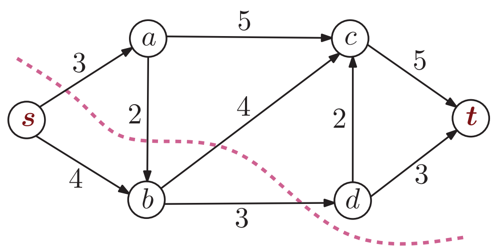
Problema del flujo máximo

Def.: La capacidad de un corte (S, T) es

$$\mathrm{cap}(S,T) = \sum_{x \in S \ y \in T} c(x,y)$$



$\mathrm{cap}(S, T) = 12$



$\mathrm{cap}(S', T') = 10$

Prop.: Para todo flujo f y todo corte (S, T),

$$\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(S,T)$$

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte...

Problema del flujo máximo

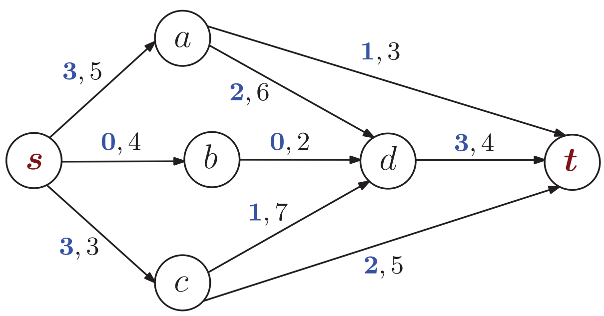
Teorema (Ford & Fulkerson)

$$\max_{f \text{ flujo}} \mathrm{val}(f) = \min_{(S,T) \text{ corte}} \mathrm{cap}(S,T)$$

Cómo aumentar el flujo

Nuestro problema ahora:

Dada una red de transporte N y un flujo sobre ella f, si f no es maximal, ¿cómo aumentar su valor?



Cómo aumentar el flujo

Sea P un camino no dirigido de s a t

A Todas las aristas con la misma dirección.

$$s \xrightarrow[2\ +1]{4} a \xrightarrow[2\ +1]{5} b \xrightarrow[1\ +1]{4} t$$

$$\begin{aligned}
\text{residuo}(sa) &= 4 - 2 = 2 \longleftarrow \text{AUMENTO}\\
\text{residuo}(ab) &= 5 - 2 = 3\\
\text{residuo}(bt) &= 4 - 1 = 3
\end{aligned}$$

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Cómo aumentar el flujo

Sea P un camino no dirigido de s a t

A Todas las aristas con la misma dirección.

$$x_1 \longrightarrow x_2 \quad \cdots \quad x_i \longrightarrow x_{i+1} \quad \cdots \quad x_{k-1} \longrightarrow x_k$$

$$\alpha_i = \text{residuo}(x_i, x_{i+1}) = c(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1})$$

Aumento: $\alpha = \min\limits_{1 \leq i \leq k-1} \alpha_i$ $\qquad$ P camino aumentador si $\alpha > 0$

$$f^*(e) = \begin{cases} f(e) & \text{si } e \notin P \\ f(e) + \alpha & \text{si } e \in P \end{cases}$$

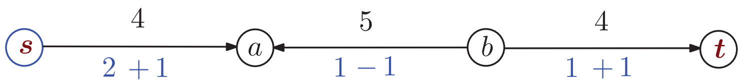
$$\boxed{\text{val}(f^*) = \text{val}(f) + \alpha}$$

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte...

Cómo aumentar el flujo

Sea P un camino no dirigido de s a t

B No todas las aristas con la misma dirección.



$$\begin{aligned} \text{residuo}(sa) &= 4-2 &&= 2 \\ \text{residuo}(ab) &= 1 &&= 1 \longleftarrow \text{AUMENTO} \\ \text{residuo}(bt) &= 4-1 &&= 3 \end{aligned}$$

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos

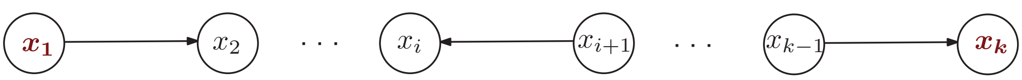
POLITÉCNICA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Cómo aumentar el flujo

Sea P un camino no dirigido de s a t

B No todas las aristas con la misma dirección.



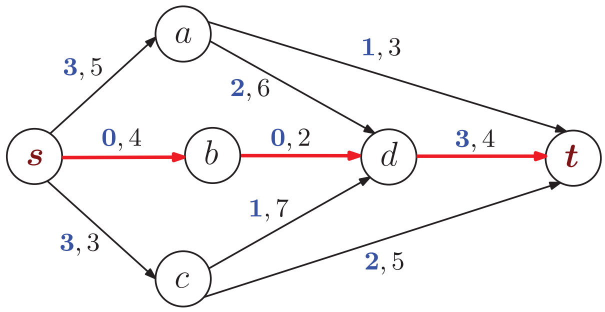
$$\alpha_i = \text{residuo}(x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} c(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1}) & \text{si } (x_i, x_{i+1}) \in A_D \\ f(x_{i+1}, x_i) & \text{si } (x_{i+1}, x_i) \in A_D \end{cases}$$

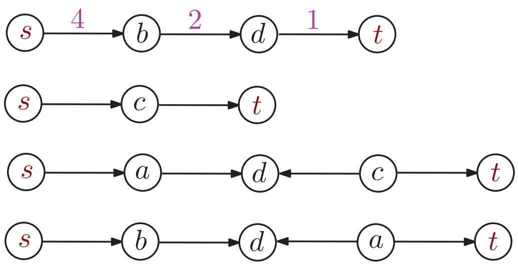
Aumento: $\alpha = \min_{1 \le i \le k-1} \alpha_i$ $\qquad$ P camino aumentador si $\alpha > 0$

$$f^*(e) = \begin{cases} f(e) & \text{si } e \notin P \\ f(e) + \alpha & \text{si } e = (x_i, x_{i+1}) \\ f(e) - \alpha & \text{si } e = (x_{i+1}, x_i) \end{cases} \qquad \boxed{\text{val}(f^*) = \text{val}(f) + \alpha}$$

Cómo aumentar el flujo

Ejemplo:

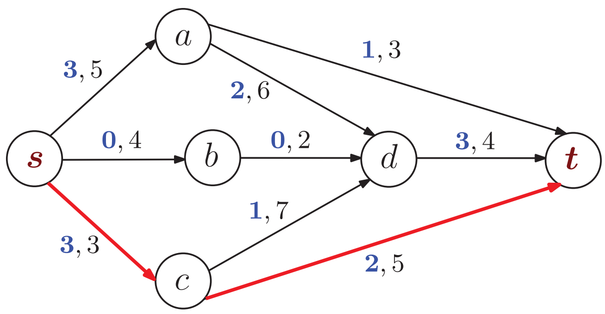


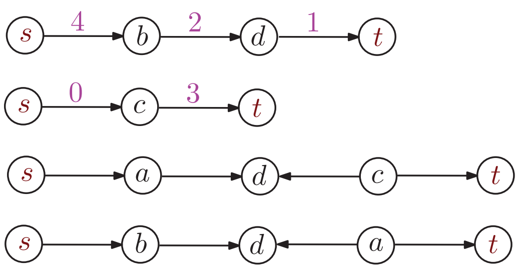


α	¿f-Aumentador?
1	Sí

Cómo aumentar el flujo

Ejemplo:

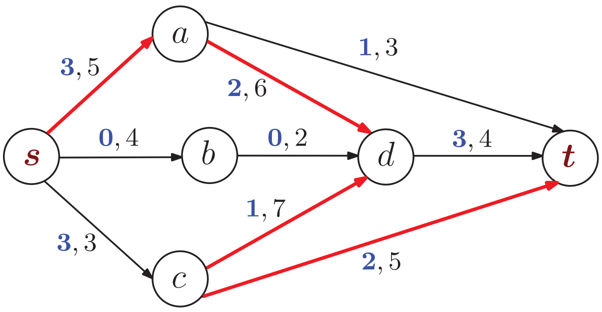


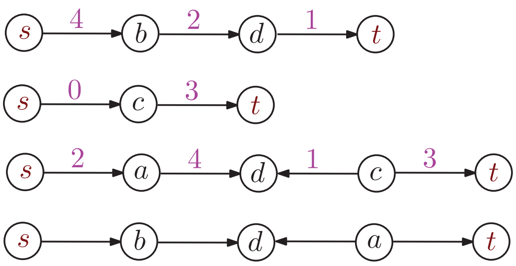


α	¿f-Aumentador?
1	Sí
0	No

Cómo aumentar el flujo

Ejemplo:



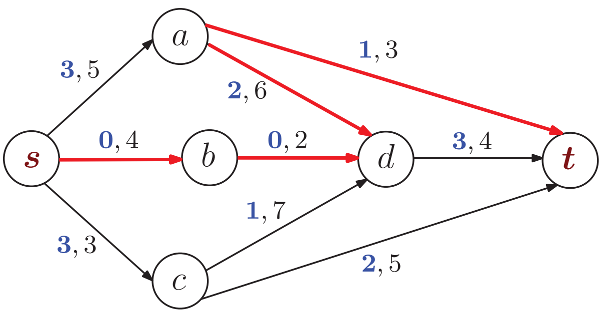


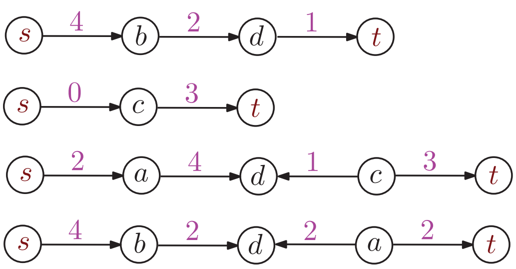
α	¿f-Aumentador?
1	Sí
0	No
1	Sí

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Cómo aumentar el flujo

Ejemplo:





α	¿f-Aumentador?
1	Sí
0	No
1	Sí
2	Sí

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte...

Método de Ford-Fulkerson

1) Partir de un flujo ($f \equiv 0$).

2) Mientras exista P camino aumentador en N,

    Aumentar f a lo largo de P.

3) Devolver f.

- ¿Acaba?
- ¿f es maximal?

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Método de Ford-Fulkerson

Teorema (F& F) Si f es un flujo en N, son equivalentes:

a) f es maximal.

b) No hay caminos f-aumentadores.

c) $\mathrm{val}(f) = \min_{(S,T) \text{ corte}} \mathrm{cap}(S, T)$.

Dem:

a $\Rightarrow$ b y c $\Rightarrow$ a son triviales

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación Estado del Arte...

Método de Ford-Fulkerson

Teorema (F& F) Si f es un flujo en N, son equivalentes:

(a) f es maximal.

(b) No hay caminos f-aumentadores.

(c) $\mathrm{val}(f) = \min_{(S,T) \text{ corte}} \mathrm{cap}(S,T)$.

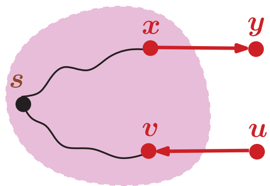
Dem: (b) $\Rightarrow$ (c)

Sean $S = \{s\} \cup \{x \in V \,/\, \exists$ camino aumentador incompleto de s a $x\}$

$T = V - S$

1) $\boxed{\text{b}} \Rightarrow t \in T \quad \Rightarrow (S,T)$ es corte.

2) $\mathrm{val}(f) = \sum_{x \in S \; y \in T} f(x,y) - \sum_{u \in T \; v \in S} f(u,v)$



Método de Ford-Fulkerson

Teorema (F& F) Si f es un flujo en N, son equivalentes:

(a) f es maximal.

(b) No hay caminos f-aumentadores.

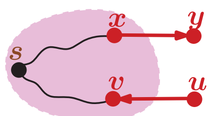
(c) $\mathrm{val}(f) = \min_{(S,T) \text{ corte}} \mathrm{cap}(S,T)$.

Dem: (b) $\Rightarrow$ (c)

Sean $S = \{s\} \cup \{x \in V \,/\, \exists$ camino aumentador incompleto de s a $x\}$

$T = V - S$

1) $\boxed{\text{b}} \Rightarrow t \in T \quad \Rightarrow (S,T)$ es corte.

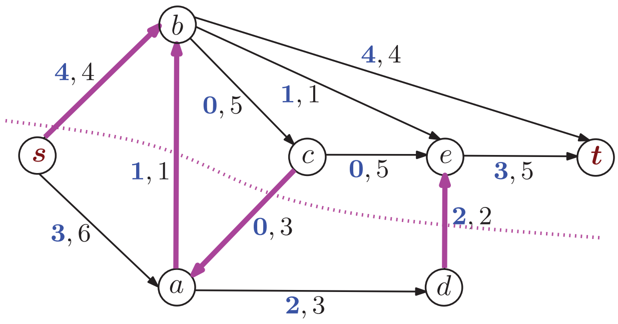


2) $\mathrm{val}(f) = \sum_{x \in S \; y \in T} f(x,y) - \sum_{u \in T \; v \in S} f(u,v) = \sum_{x \in S \; y \in T} c(x,y) - 0 = \mathrm{cap}(S,T)$

3) $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(S,T) = \min_{(S',T') \text{ corte}} \mathrm{cap}(S',T')$ ■

Problema del flujo máximo

Ejemplo



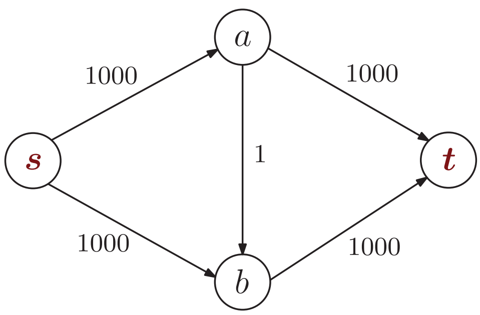
$$\mathrm{val}(f) = 7$$

El método F&F permite calcularlo en $O(\mathrm{val}(f) \cdot q)$

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

Problema del flujo máximo

Ejemplo



máx_flujo $= 2000$

2000 caminos aumentadores después: máx_flujo

Algoritmo del etiquetado de Edmonds-Karp

Características:

- Sigue el método de F&F: ir aumentando el flujo a través de caminos aumentadores, pero siempre los más cortos.
- Con esa estrategia, se puede garantizar que siempre acaba y da un flujo maximal y un corte de capacidad mínima.
- Puede implementarse en tiempo $O(n \cdot q^2)$ y espacio $O(q)$.

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos
POLITÉCNICA
CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

Algoritmo del etiquetado de Edmonds-Karp

Estrategia:

1) Partir de un flujo cualquiera ($f \equiv 0$)
2) Usar **BEA** para construir un árbol de caminos aumentadores incompletos con raíz en s.
3) Si el árbol llega a t, aumentar f a lo largo de ese camino y volver a 2) con el nuevo flujo.

   Si no llega a t, FIN. Y entonces,

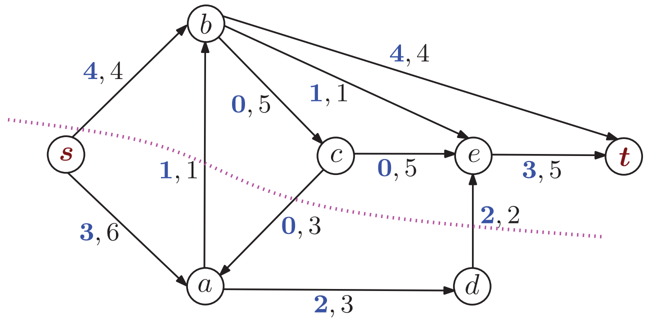
$$\begin{aligned} S &= \{ \text{ vértices a los que llega } \} \\ T &= V - S \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (S,T) & \text{corte mínimo} \\ f & \text{flujo máximo} \end{array}}$$

BEA = búsqueda en anchura

Algoritmo del etiquetado de Edmonds-Karp

Ej.:



$$\begin{aligned} S &= \{s, a, d\} \\ T &= \{b, c, e, t\} \end{aligned}$$

Corte de capacidad mínima

$\mathrm{val}(f) = 4 + 1 + 2 = 7$

Flujo de valor máximo

Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos

POLITÉCNICA

CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

Problema del flujo máximo

Resultados

'56 Ford-Fulkerson: Teorema: máx_flujo=mín_corte

'57 " Algoritmo

- sólo válido si $c : A \longrightarrow \mathbb{Q}^+$
- No polinómico

'72 Edmonds-Karp: F&F + BEA $O(n \cdot q^2)$

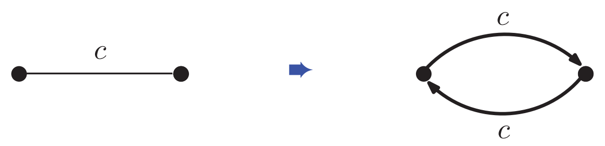
- válido para $c : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$
- Polinómico

'74 Karzanov: Preflujo $O(n^2 \cdot q^2)$

'88 Goldberg-Tarjan: Preflow-Push $O(n \cdot q \cdot \log \frac{n^2}{q})$

Problema del flujo máximo. Redes generales

Redes con aristas no dirigidas



Redes con limitación de flujo en vértices

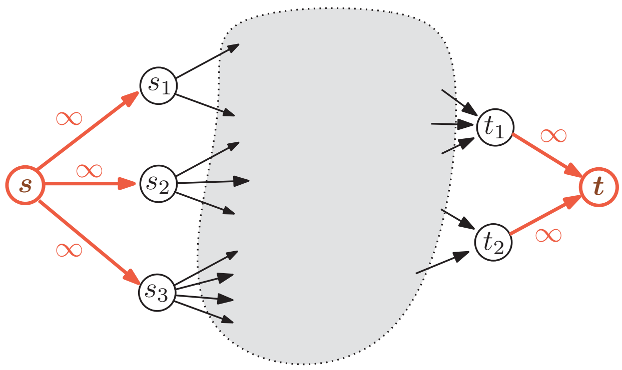
Escuela Técnica Superior de
Ingeniería de Sistemas Informáticos

POLITÉCNICA

CAMPUS
DE EXCELENCIA
INTERNACIONAL

Problema del flujo máximo. Redes generales

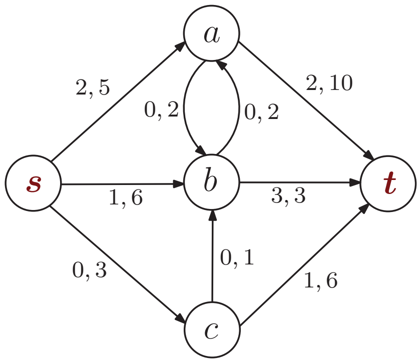
Redes con varias fuentes y varios sumideros



Problema del flujo máximo. Redes generales

Redes con limitación inferior y superior de flujo

Ej.: Canalización de petróleo en Alaska



En general, $N = (D, l, u)$ donde

$$l, u : A_D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$0 \leq l(e) \leq u(e) \quad \forall e \in A_D$$

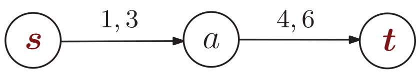
Flujo en N

1) Ley de conservación
2) Ley de viabilidad

$$l(e) \leq f(e) \leq u(e) \quad \forall e$$

Problema del flujo máximo. Redes (D, l, u)

Obs.: Hay redes no factibles



Problemas:

1) Dada la red N, determinar si es factible (admite un flujo).
2) Si N es factible, hallar un flujo, y
3) Adaptar el método F&F para hallar un flujo maximal en N.

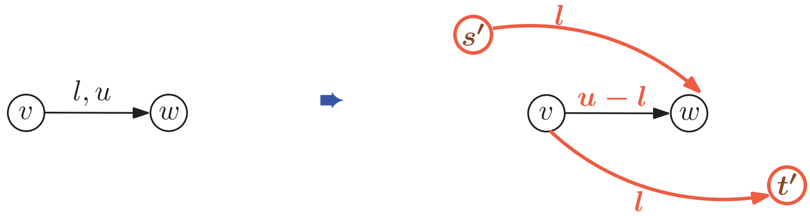
Problema del flujo máximo. Redes (D, l, u)

Transformación de N en una red básica asociada N'

N N'

Paso 1:

Paso 2:



Problema del flujo máximo. Redes (D, l, u)

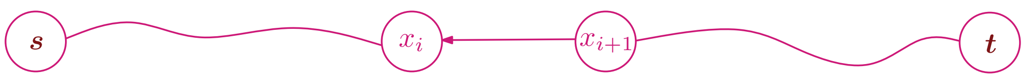
Solución:

1) Dada la red N, construir la red básica asociada N'.
2) Hallar un flujo maximal f' en N'.
3) Si $\mathrm{val}(f') \neq \sum l(e)$, FIN, N no es factible.
4) Si no, iniciar el algoritmo de E&K modificado con el flujo

$$f = f' + l$$

para hallar el máximo flujo en N.

Modificación:



El resíduo $\alpha_i = f(x_{i+1}, x_i) - l(x_{i+1}, x_i)$

Problema del flujo máximo. Redes (D, l, u)

Teorema

$\boldsymbol{N = (D, l, u)}$ es factible $\Leftrightarrow$ el flujo máximo en $\boldsymbol{N'}$ es $\sum_{e \in A_D} l(e)$.

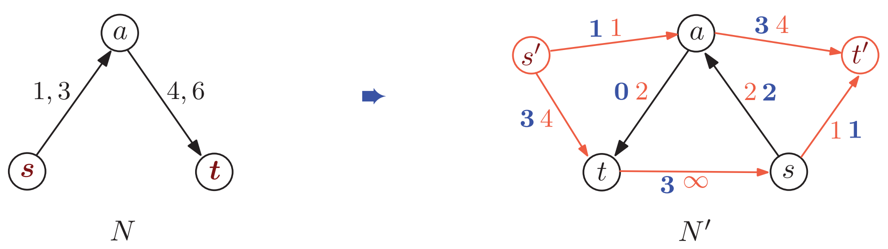
Si $\boldsymbol{N}$ factible y $\boldsymbol{f'}$ es un flujo maximal en $\boldsymbol{N'}$ entonces

$$f(e) = f'(e) + l(e) \quad \forall e \in A_D$$

es flujo en $\boldsymbol{N}$

Problema del flujo máximo. Redes (D, l, u)

Ejemplo 1:



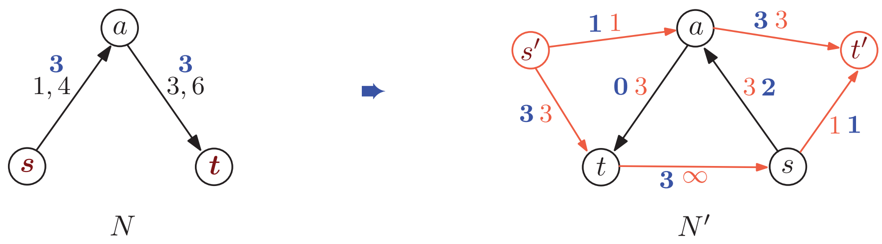
$\sum l(e) = 1 + 4 = 5$

máx_flujo$= 4 < 5$

$\boldsymbol{N}$ no factible

Problema del flujo máximo. Redes (D, l, u)

Ejemplo 2:



$\sum l(e) = 1 + 3 = 4$

máx_flujo$= 4$

N factible