Digrafos fuertemente conexos minimales (MSD) vs árboles

21 de marzo de 2017

Preliminares

- Definiciones(I): Grafo, digrafo, orden, tamaño, grado, in- y exgrado.
- Definiciones (II): Caminos, ciclos. Conexión de grafos. Conexión y conexión fuerte de digrafos.
- Minimalidad: Grafo conexo, árbol. Digrafo fuertemente conexo (SD), digrafo fuertemente conexo minimal (MSD).
- Digrafo$\leftrightarrow$matriz de adyacencia; SD$\leftrightarrow$matrices irreducibles ; MSD$\leftrightarrow$matrices casi reducibles.
- NIEP: Nonnegative inverse eigenvalue problem: dados $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, encontrar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una matriz no negativa A de orden n con polinomio característico $x^n + k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \cdots + k_n$.
  - Los coeficientes están relacionados con la estructura cíclica de digrafos con matriz de adyacencia A.
  - Las realizaciones matriciales irreducibles se pueden reducir a MSD.

Iterative construction

GM '12 dieron un procedimiento secuencial para generar las clases de isomorfía de MSDs (caracterización constructiva).

- Se dieron algoritmos para calcular MSDs no etiquetados, y sus clases isoespectrales.
- Se implementaron para calcular esas clases hasta orden 15, clasificados por orden y tamaño.
- Se calcularon los máximos de los valores absolutos de los coeficientes del polinomio característico.

Hechos básicos sobre MSDs

- Un vértice es *lineal* si tiene in- y exgrado igual a 1.
- Un arco $uv \in D$ es *transitivo* si existe otro uv-camino.
- *pseudociclo*: un uv-camino junto con el arco uv.
- Un SD es minimal si y solo si no tiene arcos transitivos, o pseudociclos.
  - Cada subdigrafo fuertemente conexo de un MSD es un MSD.
  - Cada MS subdigrafo de un MSD es un subdigrafo inducido
- *Contracción* de un ciclo de longitud k en un SD: reducción del ciclo a un único vértice (se eliminan $k-1$ vértices y k arcos).
- La contracción preserva la conexión fuerte (obviamente).

Lemma (Berge)

La contracción de un ciclo en un MSD preserva la minimalidad.

Lemma

El tamaño de un MSD $D = (V, A)$ *de orden* $n \geq 2$ *verifica*
$n \leq |A| \leq 2(n-1)$.
El tamaño de D *es* n *si, y sólo si* D *es un* n*-ciclo.*
El tamaño de D *es* $2(n-1)$ *si y solo si* D *es un arbol dirigido doble.*

Lemma (Berge/Brualdi-Ryser)

Todo MSD de orden $n \geq 2$ *tiene al menos dos vértices lineales.*

Resultados útiles

Una descomposición en asas o en orejas (**ear decomposition**) de un SD es una sucesión de digrafos $\{P_0, P_1, \cdots, P_k\}$, donde $P_0 = (V_0, A_0)$ es un ciclo, y cada $P_i = (V_i, A_i)$, $1 \leq i \leq k$, es un camino o ciclo tales que:

(a) P_i y P_j no comparten arcos si $i \neq j$.

(b) Para cada $i = 1, \ldots, k$: si P_i es un ciclo, entonces sólo tiene un vértice en común con $\cup_{j=0}^{i-1} V_j$.
En caso contrario, los extremos de P_i son vértices distintos de $\cup_{j=0}^{i-1} V_j$ y ningún otro vértice de P_i pertenece a $\cup_{j=0}^{i-1} V_j$.

(c) $\cup_{i=0}^{k} A_i = A$.

Cada P_i es una *oreja* o *asa*.

Todos los SD pueden descomponerse de esa manera.

De hecho, para cada vértice u y cada ciclo C por u, C es P_0 para alguna descomposición.

Los MSDs verifican que cada oreja tiene al menos un nuevo vértice, y dos arcos.

Teorema de los coeficientes. Sea D un digrafo con polinomio característico $x^n + k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \cdots + k_{n-1} x + k_n$. Entonces

$$k_i = \sum_{CS \in \mathcal{L}_i} (-1)^{P(CS)}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

donde CS denota una *estructura cíclica,* i.e., un conjunto de ciclos disjuntos no etiquetados de D, $\mathcal{L}_i = \{CSs$ que cubren i vértices de $D\}$, y $P(CS)$ es el número de ciclos en CS.

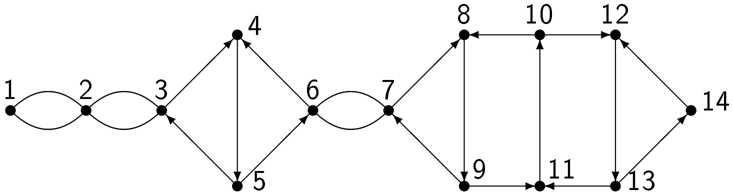
MSDs vs trees: Analogías (I)

- Los árboles y los MSDs se pueden definir de forma análoga.
- Cabría esperar grandes diferencias: en los árboles no hay ciclos; en los MSD, todo vértice pertenece al menos a un ciclo.
- Sin embargo, hay muchas más analogías que diferencias entre estas familias.
- En ambos casos, el número de aristas o arcos m, está linealmente relacionado con el orden n.
  - Árboles: $m = n - 1$
  - MSDs: $n \leq m \leq 2(n-1)$.
  - Si se considera cada arista equivalente a dos arcos, entonces el número maximal de arcos en ambos casos es $m = 2(n-1)$.
- Caracterización por el número de aristas/arcos:
  - Árboles: son los grafos conexos con $n - 1$ aristas.
  - MSDs: un SD con n arcos es un MSD (de hecho, es un n-ciclo).

Analogías (II: vértices lineales)

- Árboles y MSDs: Al menos tienen dos vértices lineales (hojas, en los árboles).
- Árboles y MSDs: en ambos casos existen ejemplos con muchos vértices lineales: las estrellas tienen $n-1$, los ciclos dirigidos tienen n.
- Árboles y MSDs: existen ejemplos con un vértice de grado alto: las estrellas.

- Hay un único árbol de orden n con un número mínimo de vértices lineales (dos): el grafo lineal L_n.
- MSDs con sólo dos vértices lineales:
  - Un MSD es **lineal simple** si es C_2 o se compone de una sucesión de $p \geq 2$ ciclos $C_3 C_4 C_4 \cdots C_4 C_3$ (cada ciclo comparte un arco con el siguiente).
  - Un MSD es **lineal** si se puede obtener desde el grafo lineal L_n por sustitución de cada arista por un MSD lineal simple (los extremos de cada arista se corresponden con los vértices lineales del MSD lineal simple).



Teorema

Sea $D = (V, A)$ un MSD. Entonces, D es lineal si, y solo si, D tiene exactamente dos vértices lineales.

Demostración

- Lema: Sea $D = (V, A)$ un MSD con dos vértices lineales. Entonces, cada uno de ellos pertenece a un único ciclo. Además, dichos ciclos son C_2 o C_3.
- Inducción sobre el número de vértices + contracción del ciclo que contiene al vértice lineal.

Consecuencias:

1. Si un MSD tiene un vértice lineal en un q-ciclo $(q \geq 4)$, entonces tiene al menos tres vértices lineales.
2. Si un MSD tiene un q-ciclo con $q \geq 5$, entonces tiene al menos tres vértices lineales.
3. Una matriz casi reducible con solo dos índices lineales es congruente por permutación a una matriz pentadiagonal.

Analogías (III: 2-cortes

En un árbol, toda arista es un corte.
En el árbol doble asociado, los arcos de cada 2-ciclo son un 2-corte.

Teorema

Cada ciclo de un MSD tiene un 2-corte.

La demostración es por inducción sobre el número de vértices.
Idea: contraer cualquier otro ciclo que comparte más de un vértice con el ciclo dado.

Cualquier matriz casi reducible es congruente por permutaciones a

$$\left(\begin{array}{c|c} * & E_{ij} \\ \hline * & * \end{array}\right).$$

La versión matricial del teorema anterior sería:

Corolario

Sea A una matriz casi reducible y C una submatriz ciclo. Entonces A es congruente por permutaciones con

$$\left(\begin{array}{c|c} * & E_{ij} \\ \hline E_{kl} & * \end{array}\right),$$

donde las entradas 1 de los bloques E_{ij} y E_{kl} se corresponden con arcos de C.
Haciendo cero esas dos entradas, se obtendría una matriz totalmente reducible.

MSDs vs trees: Diferencias (I)

- Propiedad **Path-tree**: La poseen los grafos o digrafos para los que dados dos vértices u y v, existe un único uv-camino.
- Los árboles tienen la propiedad path-tree, pero los MSDs no.

Definición

Un digrafo de ciclos dirigidos es un SD en el que todo ciclo topológico es un ciclo dirigido.

- Todo digrafo de ciclos dirigidos es un MSD.

Teorema

Sea D un SD. Entonces, D verifica la propiedad path-tree si y sólo si D es un digrafo de ciclos dirigidos.

Demostración

- "$\Rightarrow$" Elemental.
- "$\Leftarrow$" Descomposición en asas (todas las asas deben ser ciclos).

MSDs vs árboles: Diferencias (II)

Problema algorítmico: Dado un grafo conexo con pesos o, un SD con pesos, encontrar:

- el mínimo arbol generador (MST) – Hay mucho algoritmos de complejidad polinomial.
- el mínimos subdigrafo fuertemente conexo generador (MSSS): es un problema NP-duro, incluso con todos los pesos iguales a uno.

MSDs vs árboles: Analogías (IV): Recubrimientos

- Árboles: Todo árbol tiene a lo más un matching perfecto.
- MSDs: si se consideran las aristas equivalentes a dos arcos, lo equivalente sería:

Teorema

Si D es un MSD entonces D tiene, a lo más, un recubrimiento por ciclos disjuntos.

- Conjetura de Gallai (Bessy, Thomassé '07): Se puede recubrir un SD con α ciclos (no necesariamente disjuntos).
  - α es la estabilidad o número de independencia del grafo.
  - La prueba se puede aplicar a MSDs, y a árboles dobles (considerando aristas equivalentes a dos arcos).
  - Los α ciclos pueden ser necesarios: estrellas.
- Conjetura de Las Vergnas (Thomassé '01): Se puede recubrir un SD con $\alpha - 1$ caminos que no comparten arcos.
  - La prueba también sirve para MSDs y árboles dobles.
  - Hay ejemplos donde los $\alpha - 1$ caminos pueden ser necesarios: estrellas.

Demostración del Teorema.

- Supongamos que D tiene dos recubrimientos distintos por ciclos disjuntos: $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.
- Si pérdida de generalidad, se puede suponer que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ no tienen ciclos en común.
- D tiene n vértices y m arcos. $\mathcal{C}_1$ tiene k_1 ciclos, $\mathcal{C}_2$ tiene k_2, $k_1 \leq k_2$.
- Contrayendo los ciclos de $\mathcal{C}_1$, $m \leq n + 2(k_1 - 1)$.
- Por otro lado, $m \geq n + 2k_2$ (los ciclos de $\mathcal{C}_1$ tienen, en total, exactamente n arcos; cada ciclo de $\mathcal{C}_2$ añade al menos dos arcos nuevos).
- Por tanto: $m \leq n + 2(k_1 - 1) < n + 2k_2 \leq m$.

Cotas de los coeficientes de los polinomios característicos

- D MSD con n vértices.
- $x^n + k(D)_1 x^{n-1} + k(D)_2 x^{n-2} + \cdots + k(D)_n$, polinomio característico.
- $K_m(D)$ número de cubrimientos de m vértices (or arcos) de D por ciclos disjuntos.
- Por el teorema de los coeficientes, $|k_m(D)| \leq K_m(D)$.

Teorema

Sea D un árbol doble con n vértices, $n \geq 2$. Entonces, $|k_m(D)| = K_m(D)$, y:

1. *Para todo m impar con $2 \leq m \leq n$, es $K_m(D) = 0$.*
2. *Para todo m par con $2 \leq m \leq n$, es $K_m(D) \leq \binom{n - \frac{m}{2}}{\frac{m}{2}}$.*

Conjetura

Sea $D = (V, A)$ un MSD con n vértices, $n \geq 2$, y m un entero tal que $2 \leq m \leq n$. Entonces:

$$K_m(D) \leq \binom{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$$

- Para $m = n$, se sigue que el término independiente del polinomio característico de un MSD debe ser 1, 0 or -1.
- Esto también es un corolario de la unicidad del recubrimiento por ciclos, y del teorema de los coeficientes.

Comparación de las cotas con los valores extremos experimentales (entre paréntesis, cuando difieren)

n	$\lvert k_n \rvert$	$\lvert k_{n-1} \rvert$	$\lvert k_{n-2} \rvert$	$\lvert k_{n-3} \rvert$	$\lvert k_{n-4} \rvert$	$\lvert k_{n-5} \rvert$	$\lvert k_{n-6} \rvert$
2	1						
3	1	2					
4	1	2	3				
5	1	3	3	4			
6	1	3	6	4	5		
7	1	4	5 (6)	10	5	6	
8	1	4	10	8 (10)	15	6	7
9	1	5	9 (10)	20	11 (15)	21	7
10	1	5	15	16 (20)	35	15 (21)	28
11	1	6	14 (15)	35	26 (35)	56	19 (28)
12	1	6	21	30 (35)	70	40 (56)	84
13	1	7	20 (21)	56	55 (70)	126	57 (84)
14	1	7	28	50 (56)	126	91 (126)	210
15	1	8	27 (28)	84	105 (126)	252	147 (210)

n	$\lvert k_{n-7} \rvert$	$\lvert k_{n-8} \rvert$	$\lvert k_{n-9} \rvert$	$\lvert k_{n-10} \rvert$	$\lvert k_{n-11} \rvert$	$\lvert k_{n-12} \rvert$	$\lvert k_{n-13} \rvert$
9	8						
10	8	9					
11	36	9	10				
12	24 (36)	45	10	11			
13	120	29 (45)	55	11	12		
14	78 (120)	165	35 (55)	66	12	13	
15	330	105 (165)	220	41 (66)	78	13	14

Factorización de MSDs (I: árbol + bosque)

Un árbol doble puede descomponerse en dos árboles dirigidos generadores con la misma raíz (uno de ellos, invertido).

Teorema

Si D es un MSD entonces factoriza en un árbol generador con raíz y un bosque de árboles invertidos con raíz.

Demostración: se usa la descomposición en orejas.

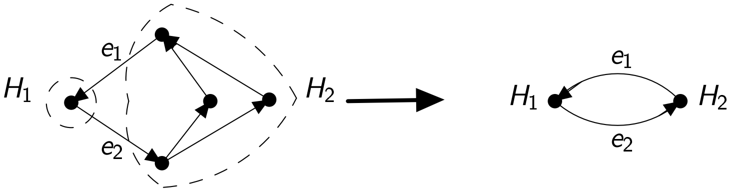
Factorización de MSDs (II: árbol doble de DAGs)

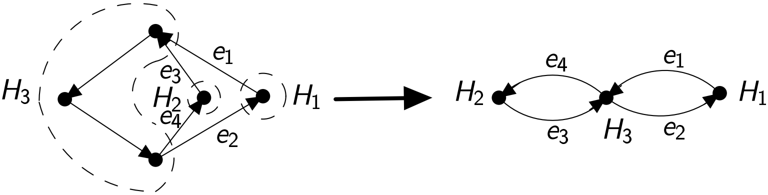
Teorema

Sea D un MSD. Entonces, D tiene un árbol doble subyacente, cuyos vértices se generan por la contracción de diagramas de Hasse conexos.

La demostración usa el teorema de los 2-cortes.
Los arcos de los 2-ciclos del árbol doble subyacente vienen de los arcos que son 2-cortes de ciclos en el MSD.
Si el MSD es un árbol doble, cada diagrama de Hasse es un vértice, y el árbol subyacente coincide con el original.

El mismo MSD puede tener dos estructuras de árbol subyacentes.





Problemas abiertos

- Algoritmos para encontrar el ciclo más largo o el camino más largo en un MSD
- Acotación inferior del número de vértices lineales en función de la longitud del ciclo más largo
- Caracterización de MSD por los coeficientes del polinomio característico