Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación

Estructura de ciclos en MSDs

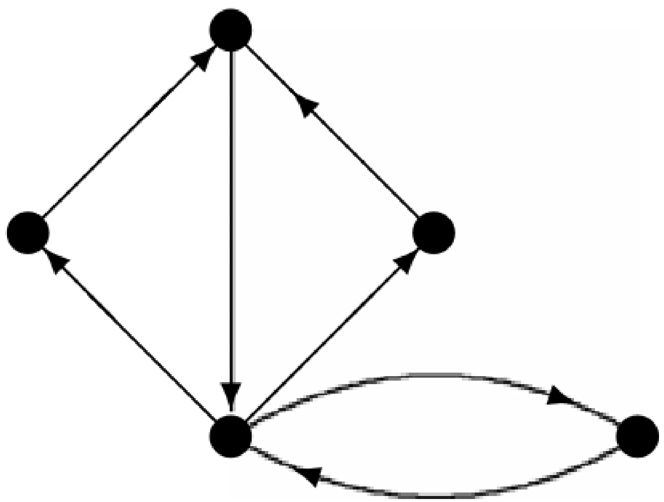
(Minimally Strong Digraphs)

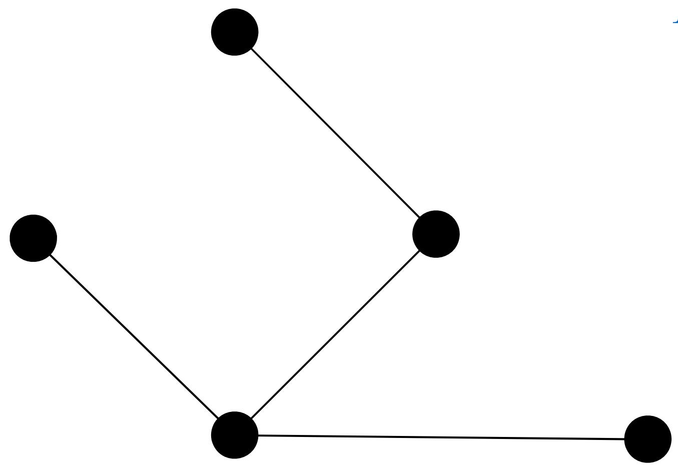
28 de marzo de 2017

Jesús García

MSD versus trees

21 de marzo de 2017
Luis M. Pozo





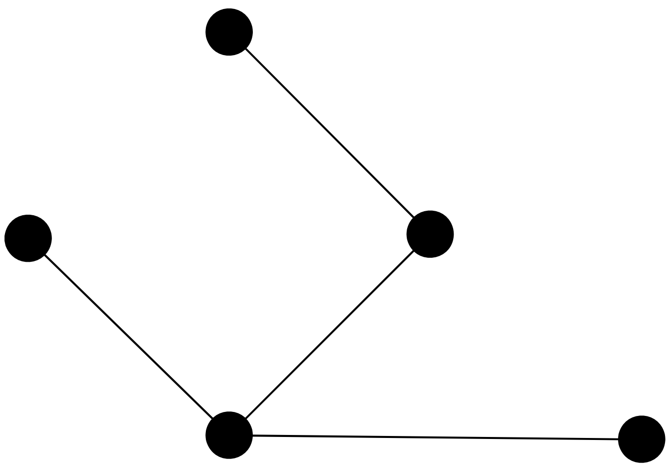
MSD

Árbol (grafo conexo minimal)

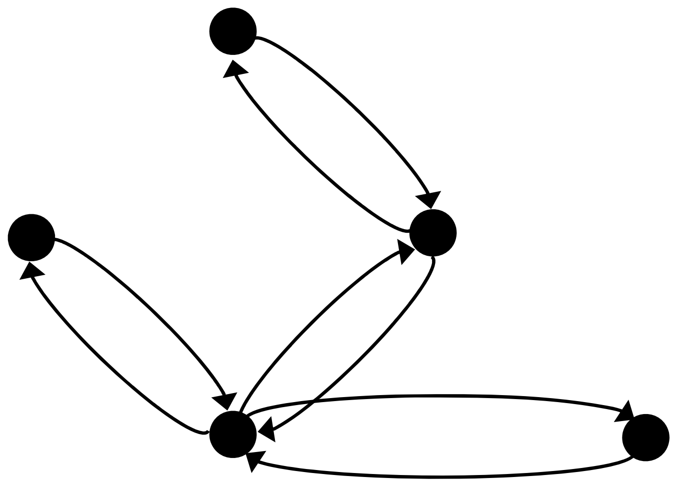
1 Definición

Caracterización

MSD versus trees



Árbol

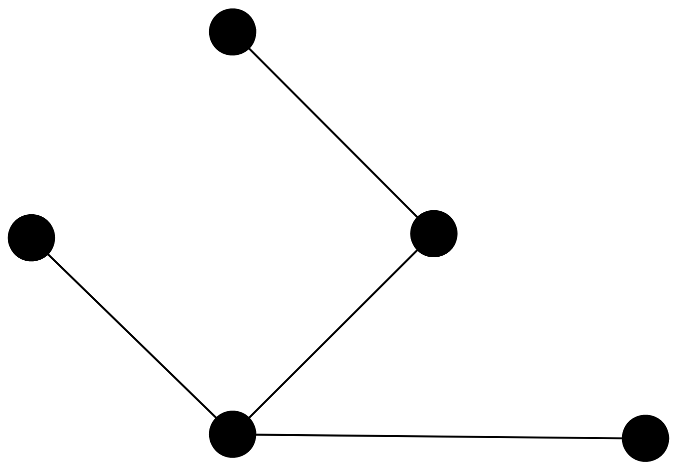


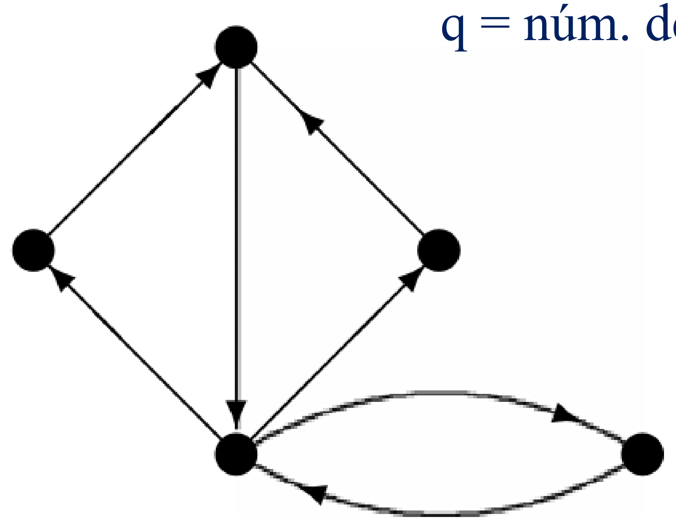
Árbol doble (es un MSD)

MSD versus trees

n = núm. de vértices

q = núm. de aristas





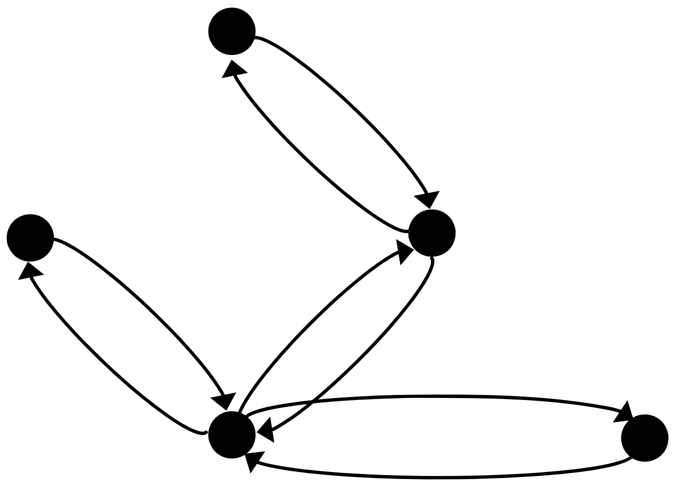
Árbol

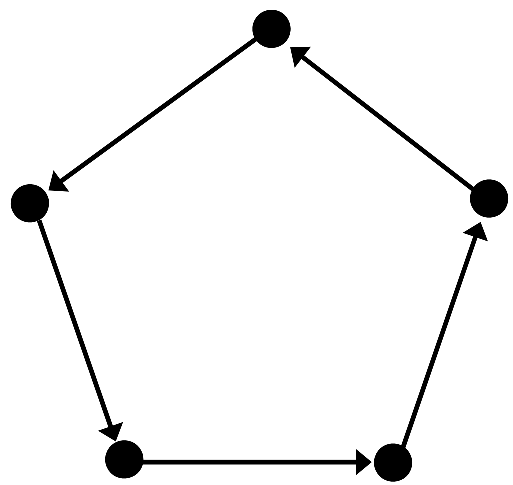
MSD

$q = n-1$

$n \leq q \leq 2(n-1)$

MSD versus trees

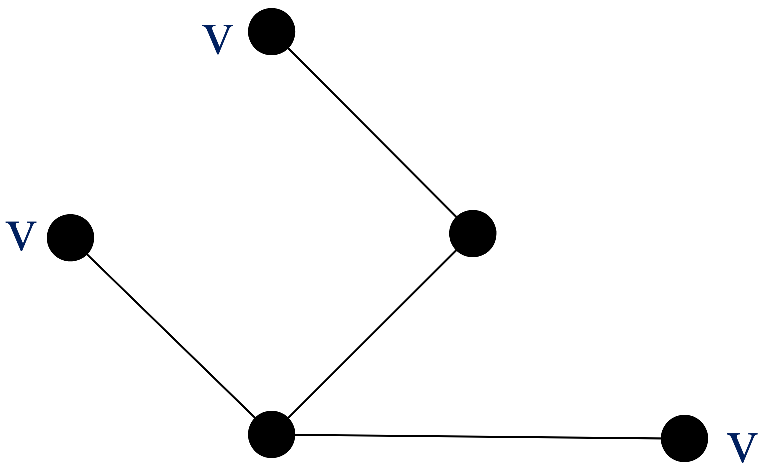


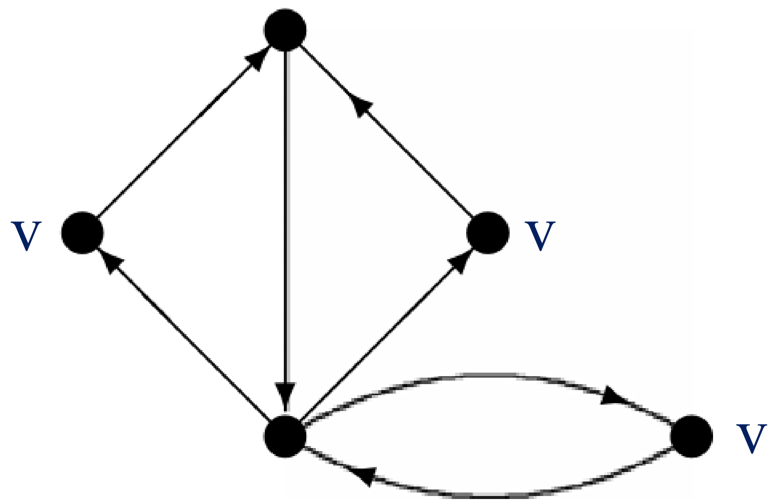


MSD y q=2(n-1)
Árbol (doble)

MSD y q=n
Ciclo (dirigido)

MSD versus trees





Árbol

v = hoja

MSD

v = vértice lineal

Árbol vs	MSD
❑ Grafo conexo minimal	❑ Digrafo fuertemente conexo minimal(1)
❑ Tiene un núm. lineal de aristas q	❑ Tiene un núm. lineal de aristas q(1)
❑ Si un grafo es conexo y q = n-1 entonces es un árbol	❑ Si un digrafo es fuertemente conexo y q = n entonces es un MSD(1)
❑ No tiene ciclos (acíclico)	❑ Sí tiene ciclos(1)
❑ El núm. de aristas está determinado por el núm. de vértices: $q = n-1$	❑ El núm. de aristas no está determinado por el núm. de vértices: $n \leq q \leq 2(n-1)$(1)
❑ Tiene al menos dos hojas (vértices de grado 1)	❑ Tiene al menos dos vértices lineales (vértices con grado de entrada y salida 1)(1)
❑ Admite a lo sumo un único matching perfecto	❑ Admite a lo sumo un único recubrimiento mediante ciclos disjuntos(2)
❑ Admite un recubrimiento mediante α aristas (α: núm. de independencia)	❑ Admite un recubrimiento mediante α ciclos (α: núm. de independencia)(3)

Árbol vs MSD

Árbol

- Admite un recubrimiento mediante α-1 caminos disjuntos (α: núm. de independencia)
- Cota de los coeficientes de los pol. característicos de las matrices de adyacencia

MSD

- Admite un recubrimiento mediante α-1 caminos disjuntos (α: núm. de independencia)[4]
- Conjetura: cota de los coeficientes de los pol. característicos de las matrices de adyacencia[2]

$$x^n + k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \cdots + k_n$$

Árbol:

$k_m = 0$ *si m es impar*

$k_m \leq \binom{n - \frac{m}{2}}{\frac{m}{2}}$ *si m es par*

MSD:

$$k_m \leq \binom{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$$

Árbol:

- Se factoriza en un árbol
- Calcular el MST es polinomial

MSD:

- Se factoriza en un árbol con raíz y en un bosque de árboles inversos con raíz[2]
- Calcular el MSSS es NP-duro[5]

Referencias

1) García-López, J. and Marijuán, C., Minimal strong digraphs, Discrete Mathematics 312(4) (2012) 737-744.

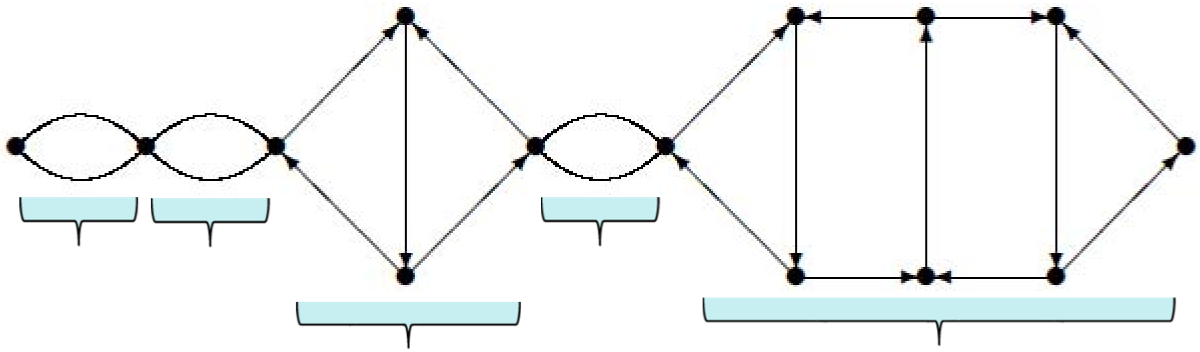
2) García-López, J., Marijuán, C. and Pozo, L. M., Structural properties of minimal strong digraphs, en preparación.

3) Bessy, S. and Thomassé, S., Spanning a strong digraph with alpha cycles: a conjecture of Gallai, Combinatorica 27(6) (2007) 659-667.

4) Thomassé, S., Covering a Strong Digraph by $\alpha - 1$ Disjoint Paths: A Proof of Las Vergnas' Conjecture, Journal of Combinatorial Theory, Series B 83 (2001) 331-333.

5) Bang-Jensen, J. and Gutin, G., Digraphs. Theory, Algorithms and Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, London, 2001.

Estructura de ciclos en MSDs



MSD lineal

Está formado por grupos: C_2, C_3C_3, $C_3C_4C_3$, $C_3C_4C_4C_3$…

Teorema: Un MSD es lineal si y solo si tiene exactamente dos vértices lineales

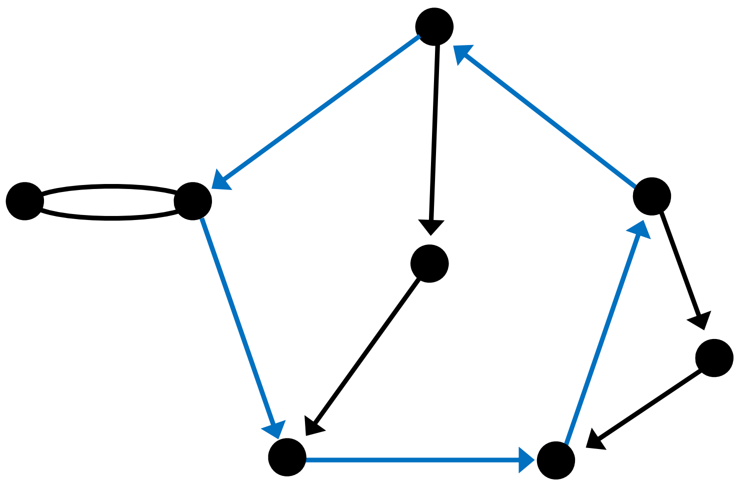
Estructura de ciclos en MSDs

Conjetura: Si un MSD tiene un ciclo de longitud k, C_k, entonces el número de vértices lineales verifica

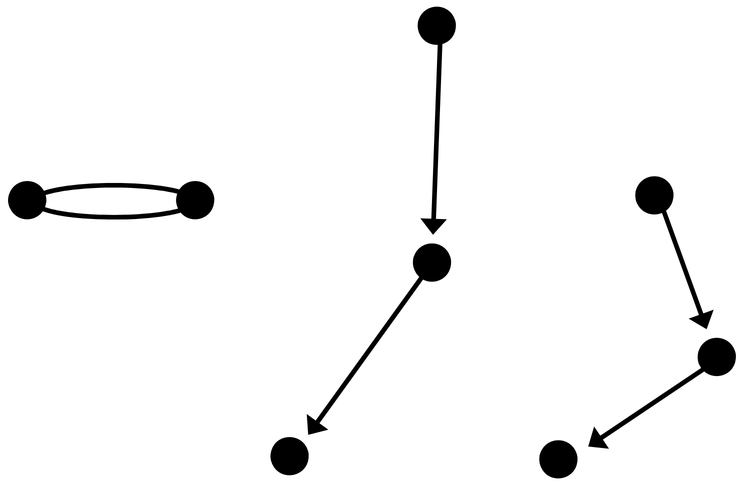
$$n_l \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$$

Estrategia: Suprimir las aristas de C_k y estudiar las componentes fuertemente conexas que quedan

Estructura de ciclos en MSDs

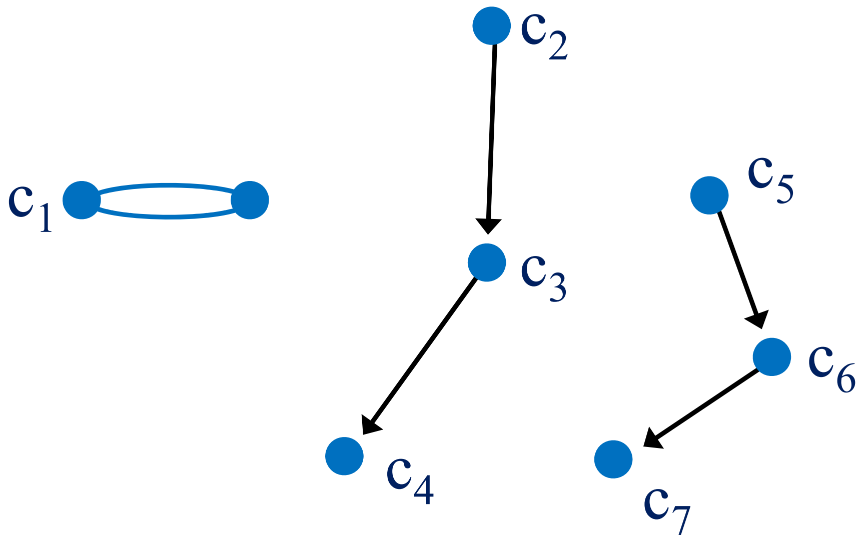


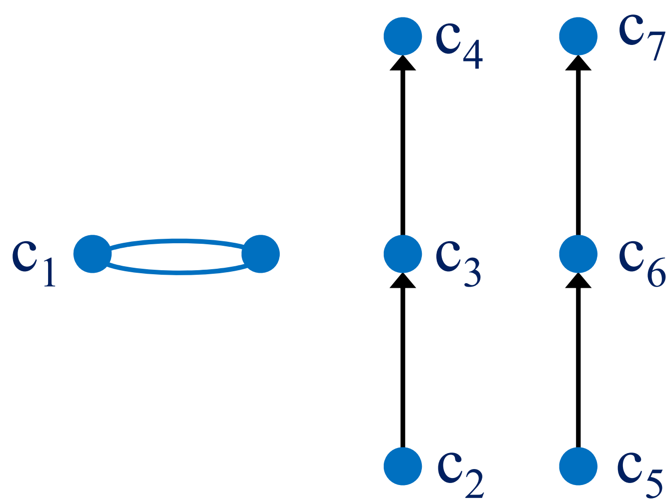
MSD con un ciclo C_5



Suprimimos las aristas del ciclo

Estructura de ciclos en MSDs

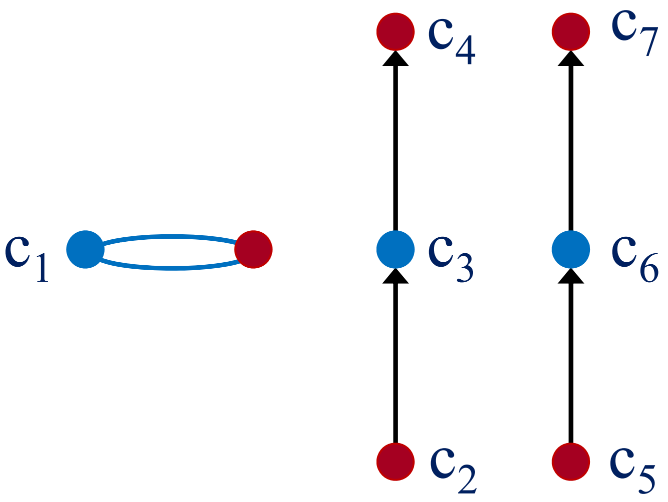


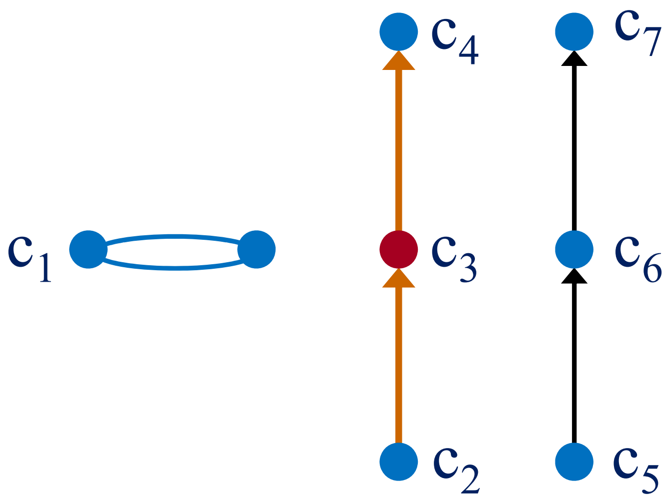


Calculamos las CFC

Las CFC definen un diagrama de Hasse

Estructura de ciclos en MSDs





Las CFC minimales y maximales tienen vértices del ciclo

Cada CFC pertenece al camino entre un minimal y un maximal

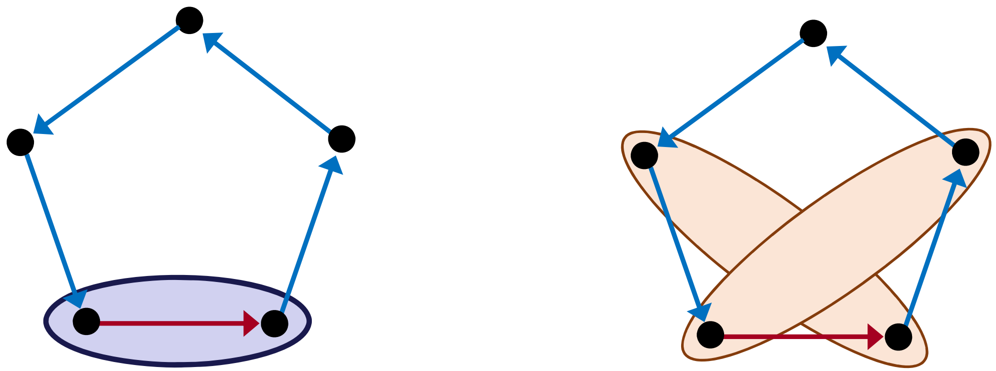
Estructura de ciclos en MSDs

Teorema: El número de CFC verifica

$$n_c \geq \left\lceil \frac{k+3}{2} \right\rceil$$

Resultados previos:

- Una CFC no puede contener vértices consecutivos en el ciclo
- Dos CFC que se cruzan no pueden tener vértices consecutivos

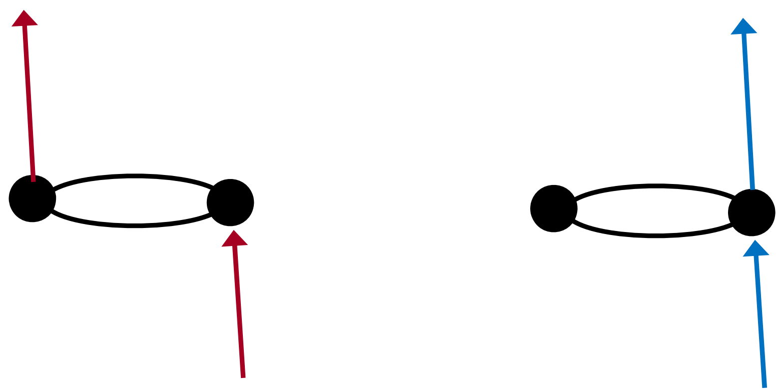


Estructura de ciclos en MSDs

Teorema: Toda CFC con más de un vértice tiene un vértice lineal

Sea c una CFC con más de un vértice. Hacemos la demostración por inducción en el número de vértices de c, n_c:

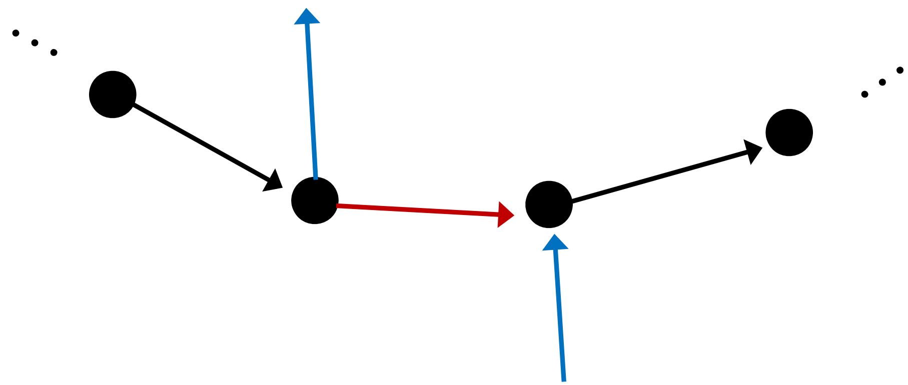
1) $n_c = 2$, es decir, $c = C_2$



Estructura de ciclos en MSDs

2) Caso general: $n_c > 2$:

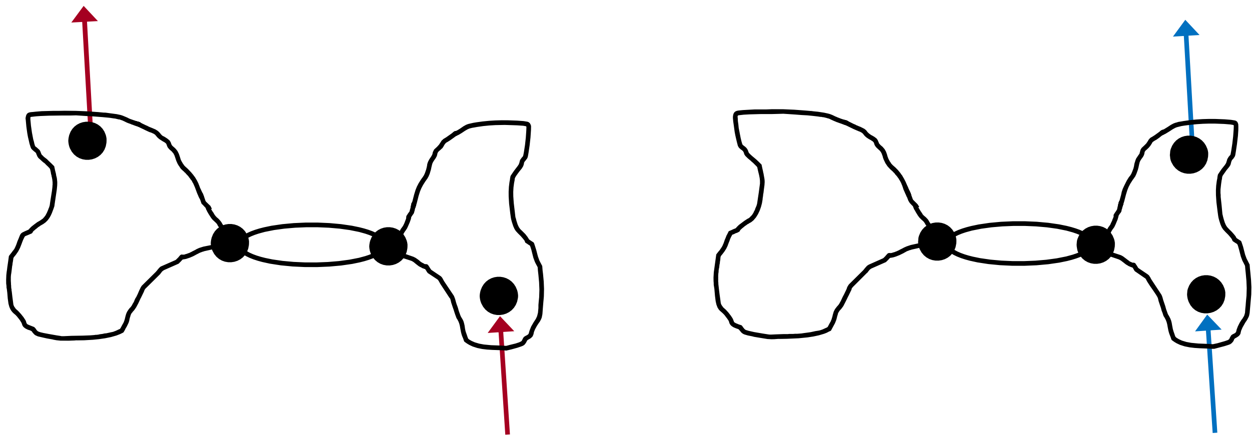
   a) c no puede ser un ciclo de longitud n_c sin vértices lineales



Estructura de ciclos en MSDs

2) Caso general: $n_c > 2$:

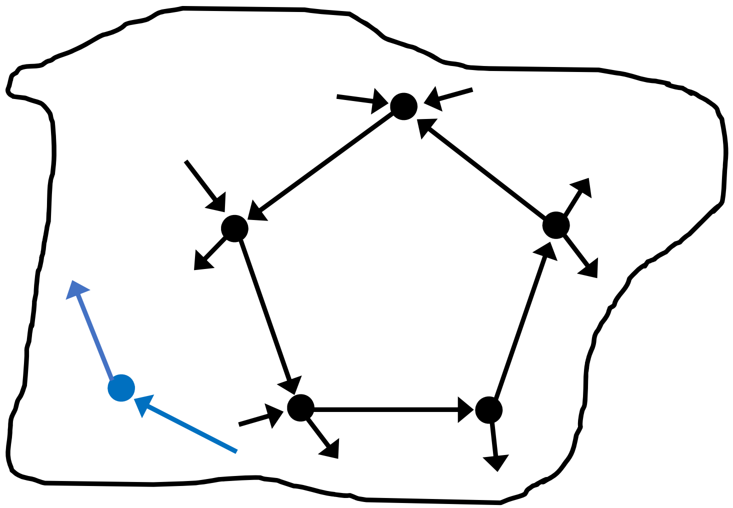
   b) c tiene un ciclo sin vértices lineales de longitud p=2



Estructura de ciclos en MSDs

2) Caso general: $n_c > 2$:

c) c tiene un ciclo sin vértices lineales de longitud $2 < p < n_c$



Preguntas…