



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Algoritmos: MSDs versus árboles

Jesús García

11 de abril de 2018

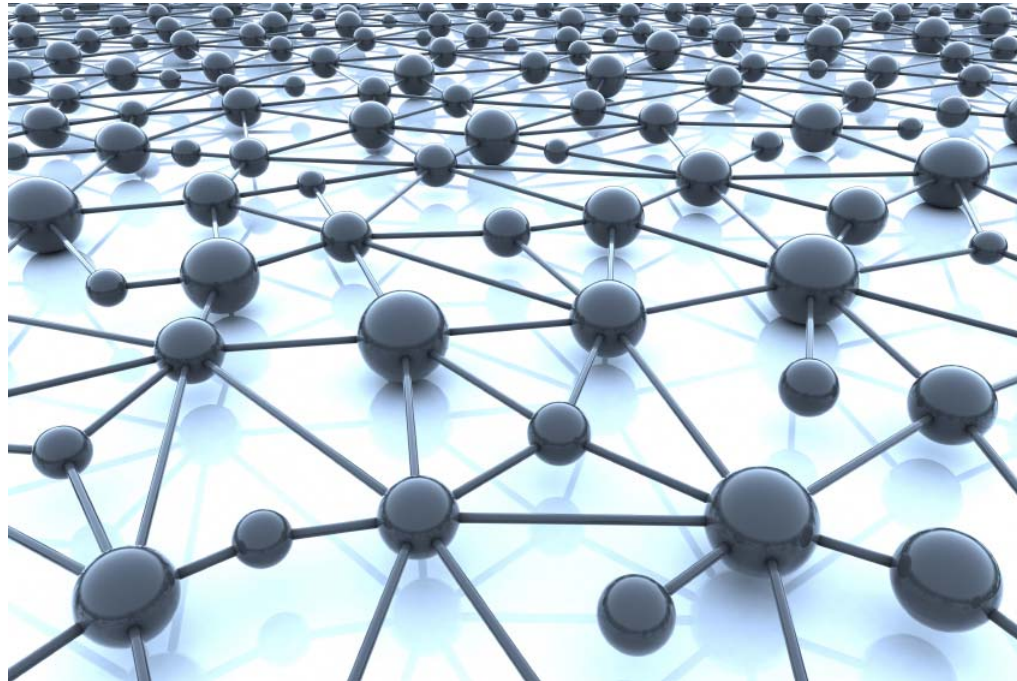




POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Característica principal
de un grafo (red):

- Conectividad local y
- Conectividad global



Recorridos en profundidad,
en anchura...



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Aplicaciones:

- Cálculo de caminos mínimos



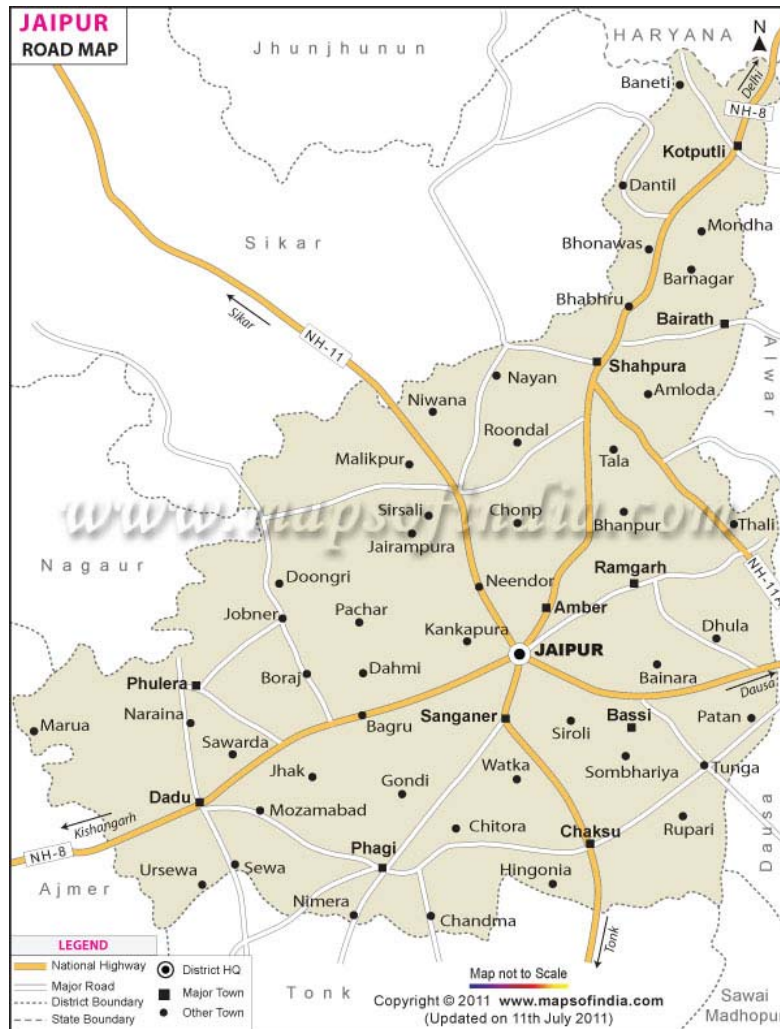
Algoritmos de Dijkstra, Floyd-Warshall...



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Aplicaciones:

- Ubicación de servicios: centros, medianas...



Toma de decisiones



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Aplicaciones:

- Optimización de redes de transporte



Algoritmos de Ford–Fulkerson,
Edmonds–Karp...

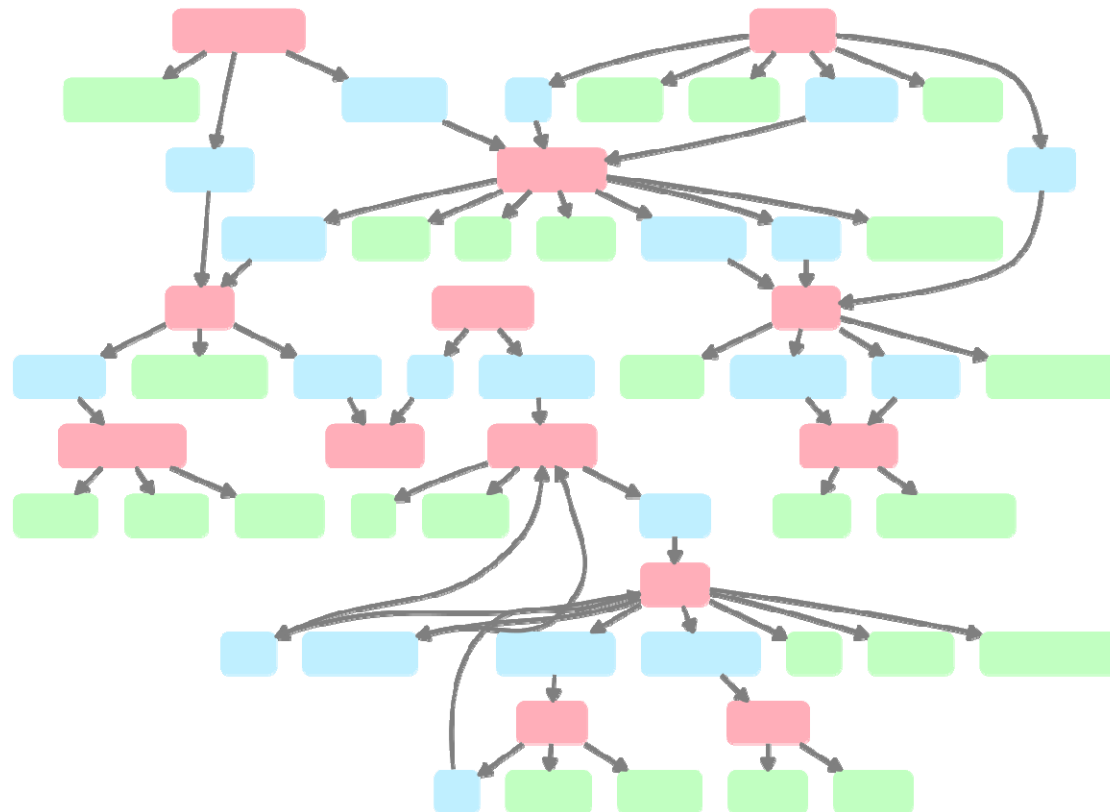




POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Aplicaciones:

- Reconocimiento de patrones



Isomorfismo de grafos y subgrafos



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Aplicaciones:

- Planificación de procesos industriales y comerciales



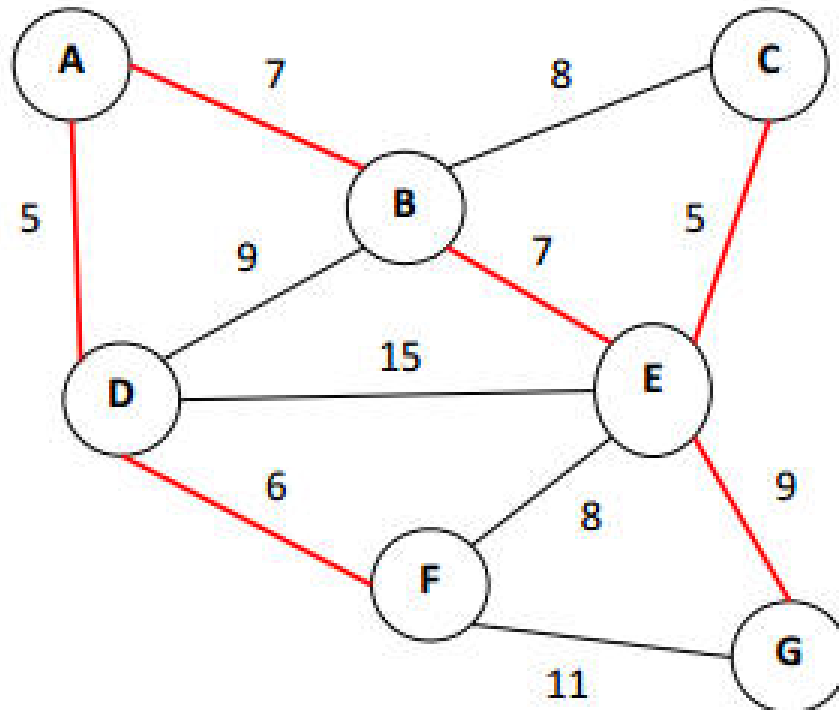
Scheduling



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Optimización de grafos conexos:



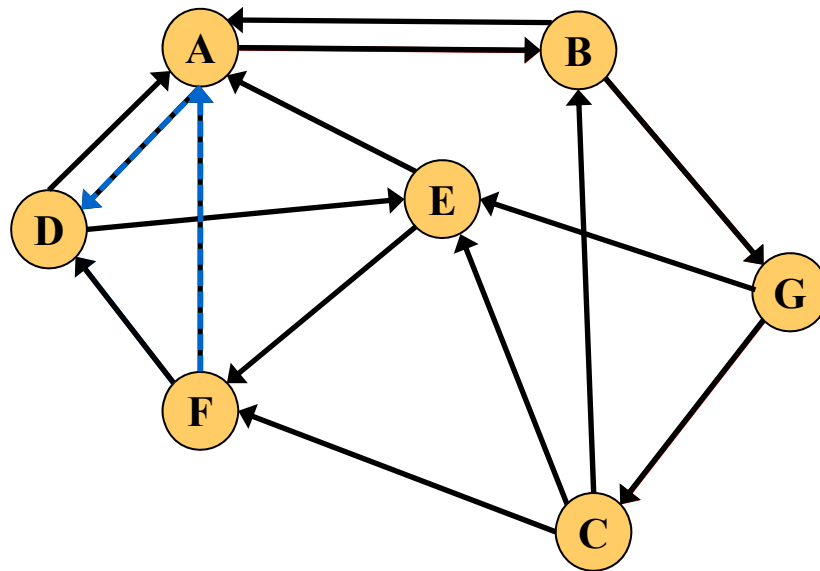
- El resultado es un árbol
- Se llama árbol generador de peso mínimo (MST)
- Algoritmos de Prim, Kruskal...



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Optimización de digrafos (grafos dirigidos) fuertemente conexos:



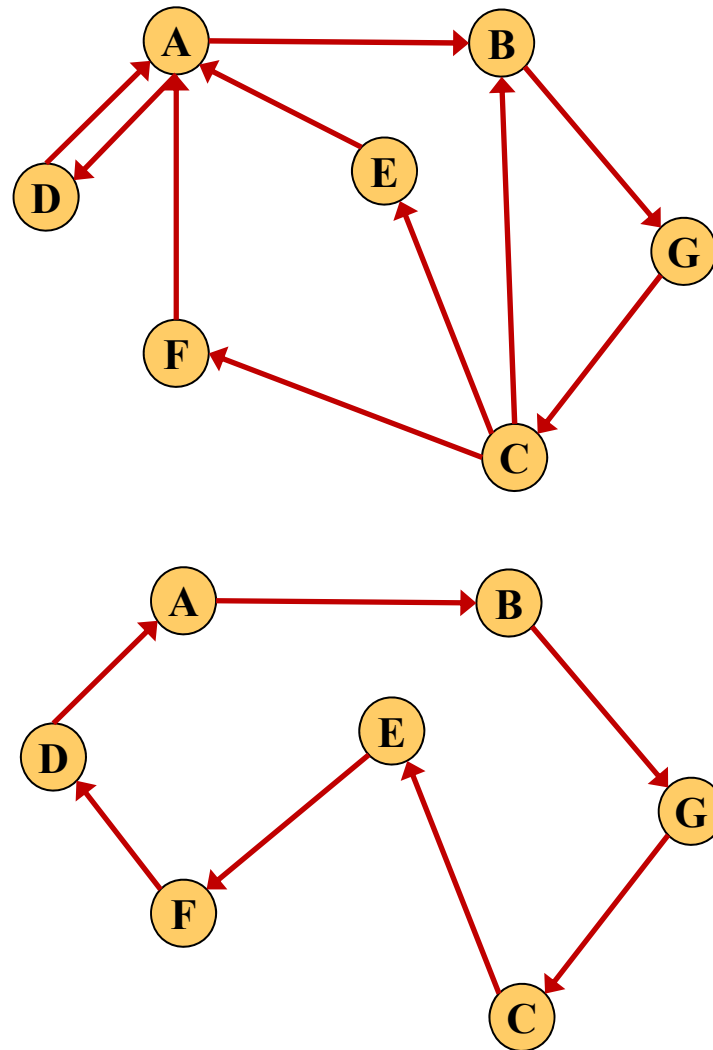
- ❑ El resultado es un grafo fuertemente conexo minimal (MSD)
- ❑ El problema es NP-duro



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Optimización de digrafos (grafos dirigidos) fuertemente conexos:



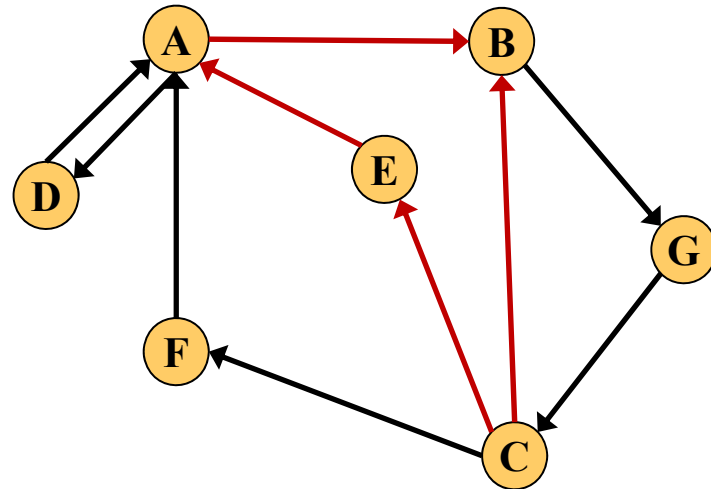
- ❑ El resultado es un grafo fuertemente conexo minimal (MSD)
- ❑ El problema es NP-duro



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

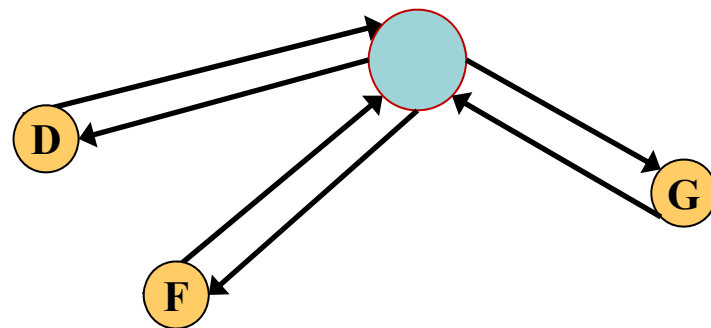
Seminario de Investigación



Propiedades importantes para el estudio de los MSDs:



- ❑ La contracción de un ciclo en un MSD genera otro MSD
- ❑ En esta operación solo se suprimen las aristas del ciclo





POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

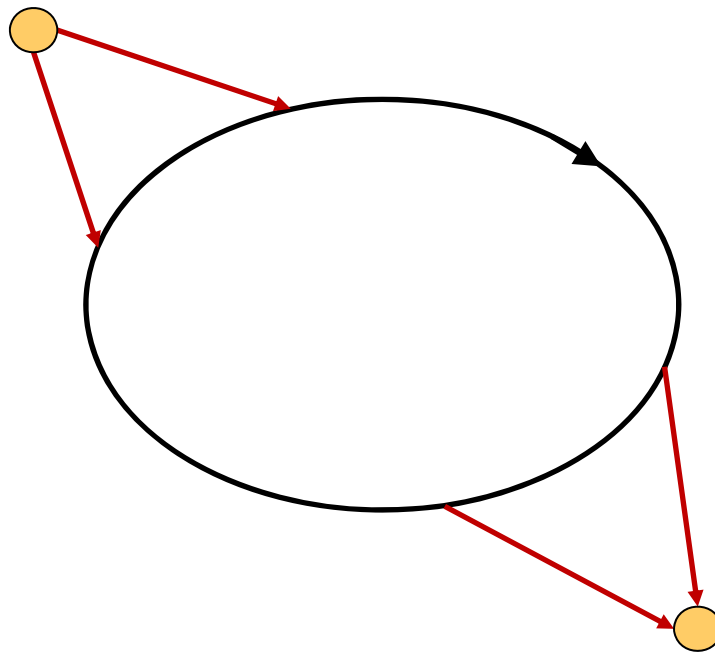
Seminario de Investigación



Propiedades importantes para el estudio de los MSDs:



- ❑ La contracción de un ciclo en un MSD genera otro MSD
- ❑ En esta operación solo se suprimen las aristas del ciclo





POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Número de MSDs (http://jglopez.etsisi.upm.es/MSC_Digraphs_Page/)

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	1												
3		1											
4		1	1										
5			2	1									
6			2	4	1								
7				7	6	1							
8				3	27	9	1						
9					23	70	12	1					
10					6	131	169	16	1				
11						66	559	344	20	1			
12						11	571	1970	662	25	1		
13							191	3479	5874	1159	30	1	
14							23	2229	17109	15526	1947	36	1
15								541	18509	69845	37072	3086	42
16								47	8226	120582	246971	81561	4743
17									1514	87963	646339	773413	167500
18									106	28879	732150	2954946	2191491
19										4217	385484	4974754	11819034
20										235	98146	3973379	28600421
21											11724	1587924	33313635
22											551	324638	19785730
23												32527	6234794
24												1301	1052874
25													90285
26													3159
$FCM(n)$	1	2	5	15	63	288	1526	8627	52021	328432	2160415	14707566	103263709



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Cota de los coeficientes de los polinomios característicos de los MSDs

Orden	$ k_n $	$ k_{n-1} $	$ k_{n-2} $											
2	1														
3	1	2													
4	1	2	3												
5	1	3	3	4											
6	1	3	6	4	5										
7	1	4	5	10	5	6									
8	1	4	10	8	15	6	7								
9	1	5	9	20	11	21	7	8							
10	1	5	15	16	35	15	28	8	9						
11	1	6	14	35	26	56	19	36	9	10					
12	1	6	21	30	70	40	84	24	45	10	11				
13	1	7	20	56	55	126	57	120	29	55	11	12			
14	1	7	28	50	126	91	210	78	165	35	66	12	13		
15	1	8	27	84	105	252	147	330	105	220	41	78	13	14	
n															



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Árbol

vs

MSD

- Grafo conexo minimal
- Tiene un núm. lineal de aristas q
- Si un grafo es conexo y $q = n-1$ entonces es un árbol
- No tiene ciclos (acíclico)
- El núm. de aristas está determinado por el núm. de vértices: $q = n-1$
- Tiene al menos dos hojas (vértices de grado 1)
- Admite a lo sumo un único matching perfecto
- Admite un recubrimiento mediante α aristas (α : núm. de independencia)

- Digrafo fuertemente conexo minimal⁽¹⁾
- Tiene un núm. lineal de aristas $q^{(1)}$
- Si un digrafo es fuertemente conexo y $q = n$ entonces es un MSD⁽¹⁾
- Sí tiene ciclos⁽¹⁾
- El núm. de aristas no está determinado por el núm. de vértices: $n \leq q \leq 2(n-1)^{(1)}$
- Tiene al menos dos vértices lineales (vértices con grado de entrada y salida 1)⁽¹⁾
- Admite a lo sumo un único recubrimiento mediante ciclos disjuntos⁽²⁾
- Admite un recubrimiento mediante α ciclos (α : núm. de independencia)⁽³⁾



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Árbol

vs

MSD

- ❑ Admite un recubrimiento mediante $\alpha-1$ caminos disjuntos (α : núm. de independencia)
- ❑ Cota de los coeficientes de los pol. característicos de las matrices de adyacencia

- ❑ Admite un recubrimiento mediante $\alpha-1$ caminos disjuntos (α : núm. de independencia)⁽⁴⁾
- ❑ Conjetura de la cota de los coeficientes de los pol. característicos de las matrices de adyacencia⁽²⁾

$$x^n + k_1x^{n-1} + k_2x^{n-2} + \dots + k_n$$

$$k_m = 0 \text{ si } m \text{ es impar}$$

$$k_m \leq \binom{n - \frac{m}{2}}{\frac{m}{2}} \text{ si } m \text{ es par}$$

$$k_m \leq \binom{n - \lceil \frac{m}{2} \rceil}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$$

- ❑ Se factoriza en un árbol
- ❑ Calcular el MST es polinomial

- ❑ Se factoriza en dos bosques⁽²⁾
- ❑ Calcular el MSSS es NP-duro⁽⁵⁾



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



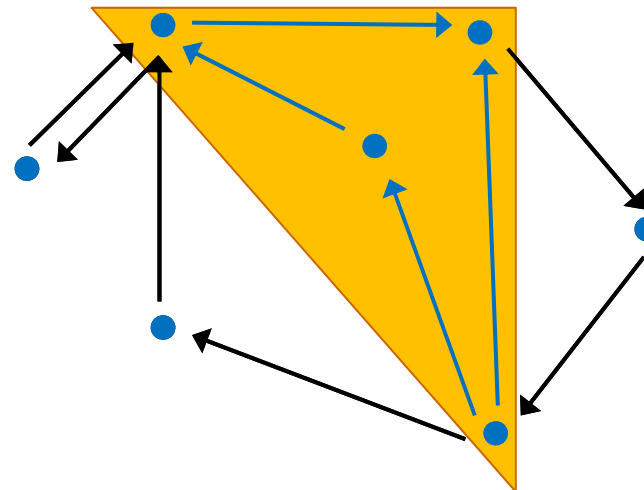
Árbol

vs

MSD

- ❑ Cada arista es un 1-corte
- ❑ Entre cada par de vértices el camino es único
- ❑ Tiene estructura de árbol

- ❑ Cada ciclo contiene un 2-corte⁽²⁾
- ❑ En la subfamilia de MSDs de *directed cycle digraph* también⁽²⁾
- ❑ Tiene estructura de árbol doble con nodos que son digrafos acíclicos conexos⁽²⁾





POLITÉCNICA

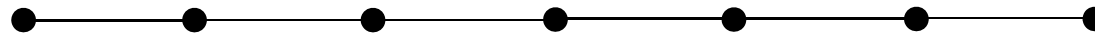
Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación

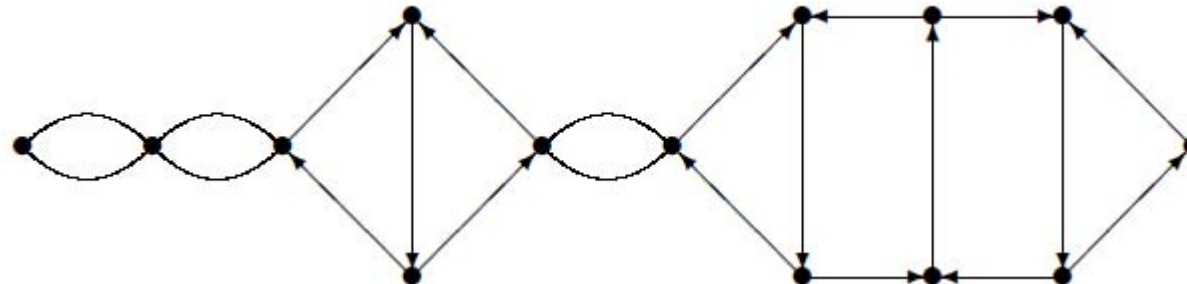


Árbol vs MSD

□ 2 hojas → árbol lineal



□ 2 vértices lineales → MSD lineal⁽²⁾



Si hay un ciclo de longitud mayor que 4 → hay más de 2 vértices lineales



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Tema de investigación:

1. Cálculo de caminos y ciclos de longitud máxima en MSDs

Para árboles es polinomial

Demostrar que para MSDs también lo es

Resultados obtenidos⁽⁶⁾

Si un MSD tiene un ciclo de longitud q entonces el número de vértices lineales es mayor o igual que

$$\left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor$$



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Tema de investigación:

2. Cálculo de conjuntos independientes de tamaño máximo en MSDs

Para árboles es lineal⁽⁷⁾: $O(n)$

Demostrar que para MSDs es polinomial

Lo proponemos como tema de tesis doctoral



POLITÉCNICA

Máster en Ciencias y Tecnologías de la Computación

Seminario de Investigación



Referencias

- 1) García-López, J. and Marijuán, C., Minimal strong digraphs, *Discrete Mathematics* 312(4) (2012) 737-744.
- 2) García-López, J., Marijuán, C. and Pozo-Coronado, L.M., Structural properties of minimal strong digraphs versus tree, *Linear Algebra and its Applications* 540 (2018) 203-220.
- 3) Bessy, S. and Thomassé, S., Spanning a strong digraph with alpha cycles: a conjecture of Gallai, *Combinatorica* 27(6) (2007) 659-667.
- 4) Thomassé, S., Covering a Strong Digraph by $\alpha - 1$ Disjoint Paths: A Proof of Las Vergnas' Conjecture, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 83 (2001) 331-333.
- 5) Bang-Jensen, J. and Gutin, G., *Digraphs. Theory, Algorithms and Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, London, 2001.
- 6) Arcos-Argudo, M., García-López, J. and Pozo-Coronado, L.M., Structure of cycles in Minimal Strong Digraphs, *Discrete Applied Mathematics* (en revisión).
- 7) Chen, G.H., Kuo, M.T. and Sheu, J.P., An optimal time algorithm for finding a maximum weight independent set in a tree, *Bit* 28 (1988) 353-356.